

ANNALEN

DER

PHYSIK.

GENERAL LIBRARY
SEP 1920
UNIV. OF MICH.

BEGÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

P. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORF, G. V. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 61. Heft 4

DER GANZEN REIHE 366. BANDES 4. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIVS BARTH.

DÖRRHENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Im Jahre 1920 erscheinen Bd. 61, 62 und 63 à 8 Hefte. Bd. 61 kostet M 45.—.

Nach dem Ausland in der Währung des betr. Landes.

Ausgegeben am 22. Februar 1920.

Inhalt.

	Seite
1. H. Dember und M. Uibe. Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes	313
2. P. Boedke. Versuch zu einer Erweiterung der Planckschen Theorie der verdünnten Lösungen	334
3. H. Dember und M. Uibe. Versuch einer physikalischen Lösung des Problems der sichtbaren Größenänderung von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont	353
4. Richard Gans. Die reversible Permeabilität auf der idealen Magnetisierungskurve	379
5. Richard Gans. Die Trägheitsmomente der Magnetonen	396
6. Richard Gans. Bemerkung zu meiner Arbeit „Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium“	398
7. Richard Gans. Oszillatoren von zwei und drei Freiheitsgraden. Ein Beitrag zur Quantentheorie	400
8. A. Esau. Der gegenseitige Induktionskoeffizient von Rechtecken und Quadraten	410

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleieherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. Über

die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes; von H. Dember und M. Uibe.

(Abdruck aus den Berichten der Mathemat.-Phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 69, 31. Juli 1917.)

Sechster Bericht über die Ergebnisse der auf Teneriffa
ausgeführten Arbeiten.

§ 1.

Der unbedeckte Taghimmel und der sternenklare Nachthimmel werden als mehr oder weniger flaches Gewölbe und nicht als vollkommene Halbkugel gesehen. Im allgemeinen ist die Form des Gewölbes mit großer Annäherung eine Kugelkalotte.¹⁾ Die Mehrzahl der Wege, diese Erscheinung zu erklären, welche nach Ptolemäus für uns „eine feste, stetige und unveränderbare Vorstellung“ bildet²⁾, ist von alters her psychologischer Art gewesen. Aristoteles und Ptolemäus haben die Theorie der Luftperspektive geschaffen, die in den dichteren lichtabsorbierenden Luftschichten des Horizonts die Ursache sieht, welche uns die Objekte lichtschwach und dadurch fern erscheinen läßt. Malebranche und Wallis erklären die weitere Entfernung des Horizonts gegenüber dem Zenit dadurch, daß in der horizontalen Blickrichtung eine große Anzahl von Objekten gesehen wird, deren Distanzen bekannt sind und daß, mit Hilfe der Kenntnis dieser, unbewußt Entfernungsschätzungen vorgenommen werden, die wegen des Vorhandenseins der Merkmale in der Horizontalen größer ausfallen als in der Richtung zum Zenit, wo die Zwischenzeichen fehlen. Mit dieser Theorie verwandt ist diejenige Alhazens. Er setzt an die Stelle des unbewußten Vergleichs von Ent-

1) H. Dember und M. Uibe, Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. S. 139—148. 1917. Ann. d. Phys. 55. S. 387. 1918.

2) Pernter-Exner, Meteorolog. Optik, 1910, Abschnitt 1 von J. M. Pernter.

fernungen den Vergleich der Größe von Gegenständen: Zwischen uns und dem Horizont sehen wir eine große Anzahl von Gegenständen, die uns der Größe nach bekannt sind. Am Horizont, wo der Himmel die Erde scheinbar berührt, erscheinen sie uns sehr klein und wir schätzen daher die Entfernung sehr groß ein, während wir in der vertikalen Blickrichtung durch das Fehlen von vergleichbaren Objekten getäuscht werden und den Zenit für nahe halten. In neuerer Zeit hat Helmholtz¹⁾ diese Theorie in Verbindung mit der Luftperspektive vertreten.

Alle diese Vorstellungen²⁾ haben den großen Mangel, daß sie wohl erklären können, warum der Horizont weiter erscheint als der Zenit oder der Himmel in einer anderen Richtung, aber daß sie versagen bei einem Vergleich zweier Entfernungen in Richtungen, die beide zwischen Horizont und Zenit liegen, wo nun bei beiden die vergleichbaren Distanzen oder Gegenstände fehlen. Von diesem Mangel frei ist die Gauss'sche Blickrichtungstheorie, die behauptet, daß infolge physiologischer Bedingungen des menschlichen Sehapparates, Winkel, mit stirnwärts gedrehten Augen bei normaler Kopfhaltung beobachtet, kleiner erscheinen als in horizontaler Blickrichtung. Ein eifriger Verfechter dieser Theorie ist J. M. Pernter. In einem vorangehenden Bericht konnte gezeigt werden, daß sich die Blickrichtungstheorie mit den Beobachtungen schwerlich vereinbaren läßt. Die Hauptgründe, die gegen ihre Grundlagen und Anwendbarkeit sprechen, sind die große Verschiedenheit der Höhe von Tag- und Nachthimmel, der Einfluß der Himmelsheelligkeit und meteorologischer Faktoren, sowie die Tatsache, daß man bei sternenklarer Nacht-Himmelsgewölbe beobachten kann mit einem geschätzten Halbierungswert von $42,9^\circ$, also nur wenig verschieden vom Halbierungswert einer Halbkugel (45°).

Den psychologisch-physiologischen Theorien, von denen die Blickrichtungstheorie heute das größte Ansehen genießt, stehen

1) H. von Helmholtz, Physiologische Optik, 2. Auflage. 1896.

2) Die drei vorangehenden Theorien sind von ihren Schöpfern gerade so wie die Blickrichtungstheorie, ursprünglich ausgedacht worden, um die scheinbare Vergrößerung von Sonne und Mond in der Nähe des Horizontes zu erklären. Man hat dieses Problem mit dem von der Gestalt des Himmelsgewölbes schon frühzeitig verquickt, obgleich die experimentellen Grundlagen dazu so gut wie vollständig fehlen.

zwei gegenüber, welche das Gewölbe als nicht scheinbar oder durch „Täuschung“ hervorgerufen ansehen, sondern es, durch physikalische Umstände bedingt, als reell vorhanden erklären.

Die Atmosphäre bildet um die Erde eine konzentrische Hülle, deren Höhe man, soweit es sich um optische Vorgänge handelt, nach den neuesten photogrammetrischen Aufnahmen¹⁾ der Nordlichtstrahlen zu 250 km ansetzen kann. Nimmt man mit Hobbes an, daß die wirkliche Grenze der Atmosphäre auch die uns sichtbare ist, so errechnet sich, bei Zugrundelegung der Form einer Kugelkalotte, ein Gewölbe mit einem zu schätzenden Halbierungswert des Bogens Horizont-Zenit von rund 12° ; ein Wert, der weit unterhalb aller beobachteten liegt. Das klare Himmelsgewölbe Hobbes müßte viel flacher gesehen werden, als es bisher beobachtet worden ist.

Eine zweite physikalische Anschauung, die von Reimann geäußert worden ist, sieht die Luft als feinen Nebel an und faßt das Himmelsgewölbe auf als die „sichtbare Grenze im nicht absolut durchsichtigen Medium“ Luft. Wir entnehmen über die Reimannsche Vorstellung der Meteorologischen Optik von Pernter-Exner folgende Sätze, da uns die Arbeit selbst nicht zugänglich ist: Reimann „führt die Erscheinung, daß uns im Nebel in einer gewissen Entfernung eine weiße Wand erscheint, die jeden weiteren Blick abschneidet, auf die Luft über, die eben nur wie ein sehr dünner Nebel wirke. Es ist wohl nur ein quid pro quo, wenn diese Auffassung nicht zu einem im Zenit vertieften statt gedrückten Gewölbe führen soll — abgesehen von allen sonstigen dagegensprechenden Momenten.“

Die Hauptfolgerung Pernters ist richtig, aber trotzdem hat die Ansicht Reimanns einen tauglichen Kern. Sieht man nämlich die Luft nicht nur als feinen Nebel an, sondern beachtet man außerdem, daß im Sinne der Rayleighschen Theorie vom Blau des Himmels jede einzelne Luftmolekel tagsüber ein Lichtzentrum ist und jeder anderen Luftmolekel sowie dem Beobachter Licht zusendet, d. h. also, berücksichtigt man die Helligkeit des Himmels, so gelangt man zu einer einfachen geometrischen Darstellung der Himmelsform aus Zahlen,

1) L. Vegard u. O. Krogness, Ann. d. Phys. 51. S. 4

die mit Hilfe ganz unabhängig von diesen Betrachtungen ausgeführter photometrischer Messungen der HimmelsHELLIGKEIT erhalten worden sind.

§ 2.

Die Entfernung eines Punktes in der Atmosphäre, von dem aus eine leuchtende Luftmolekel gerade so viel Energie ins Auge des Beobachters schickt, daß eine Lichtempfindung zustande kommt; sei die maximale Sichtweite. Die maximale Sichtweite mißt daher die Entfernung, bis zu welcher sich die für uns sichtbare Atmosphäre erstreckt. Außer von der optischen Beschaffenheit der Luft ist die maximale Sichtweite noch von der Empfindlichkeit des einzelnen Auges abhängig und sie ist beim Tageshimmel für das Auge mit derjenigen Entfernung identisch, in welcher sich eine Lichtquelle (leuchtende Molekel) nicht mehr von der hellen Umgebung abhebt. Die letztere Distanz, die „kritische“ Sichtweite könnte man sie nennen, bewirkt, daß wir in dem ihr gleichen Abstand in der Atmosphäre eine unterschiedslose Grenze erblicken, die von der leuchtenden Luft des Tageshimmels gebildet wird.

Besitzt eine leuchtende Luftmolekel m im Innern einer großen Luftmasse die Lichtintensität J_1 , so ist die Intensität in einem Abstände s davon unter Berücksichtigung der Rayleighschen Extinktion durch die auf der Strecke s liegenden Molekeln und der unendlich vielfachen Zurückstrahlung, welche diese Molekeln durch die Umgebung erleiden

$$(1) \quad J_s = \frac{J_1}{s^2} \cdot e^{-hs} + \frac{J_1}{s^2} \cdot A.$$

Hierin bedeutet h den Extinktionskoeffizienten und A den durch Zustrahlung auf der Strecke s gewonnenen Bruchteil. In einer gleichmäßig hellen Luftmasse, deren Gesamtintensität sich in einem endlichen Intervall nicht ändert, ist der durch Extinktion auf der Strecke s verlorene Bruchteil $(1 - e^{-hs})$ von J_1 gleich dem Bruchteil A .

$1 - e^{-hs} = A$, woraus, in (1) eingesetzt, die geometrische Beziehung folgt

$$J_s = \frac{J_1}{s^2}.$$

Für eine zweite Luftmasse, in welcher jede einzelne Molekel die Lichtintensität J_2 besitzt, bekommen wir gleicherweise im Abstände r die Intensität $J_r = \frac{J_2}{r^2}$. Sind nun $J_S = J_R$ gerade diejenigen Minimalintensitäten in den Abständen S und R von der Molekel m , welche im Auge gerade eine Lichtempfindung hervorrufen können, so ist $J_1 : S^2 = J_2 : R^2$ und

$$S : R = \sqrt{J_1} : \sqrt{J_2},$$

wo S und R die maximalen Sichtweiten in den beiden verschiedenen Luftmassen bedeuten.

Die mit den Photometer meßbaren Helligkeiten H_1 und H_2 , der leuchtenden Luftmassen sind den Intensitäten J_1 und J_2 direkt proportional, so daß gilt

$$(2) \quad S : R = \sqrt{H_1} : \sqrt{H_2}.$$

§ 3.

Die Beziehung (2) erlaubt, mit Hilfe von Messungen der Himmelshelligkeiten das zur Zeit der Messung *sichtbare* Himmelsgewölbe zu konstruieren und zu berechnen.

Tabelle 1 gibt eine Meßreihe von Himmelshelligkeiten wieder, die, wie die folgenden auf Teneriffa ausgeführten, zum Teil¹⁾ einer systematischen Untersuchung der Himmelshelligkeiten entnommen werden, die der eine von uns (Uibe) auf Anregung von Hrn. Prof. O. Wiener ausgeführt hat und die später als Dissertation veröffentlicht werden soll. φ bedeutet die mittlere Höhe der Sonne über dem Horizont während der photometrischen Messung, zu deren Ausführung ein Wiener-sches Himmelsphotometer diente. ζ ist die Zenitdistanz des

Tabelle 1.

Datum	ζ	H beob.	\sqrt{H} beob.	\sqrt{H} berech.
22. Juni 1916 $\varphi = 20,0^\circ$ vormittags	0°	1,00	1,00	1,00
	15	0,96	0,98	1,02
	30	1,18	1,09	1,09
	45	1,42	1,19	1,22
	60	2,03	1,42	1,42
	75	3,20	1,79	1,73

1) Es sind die vom 22. Juni 1916. Martin Uibe, Über die Helligkeitsverteilung des diffusen Sonnenlichts am klaren Himmel. Math.-Phys. Kl. d. Sächs. Ges. d. Wiss. Abhandlungen: Bd. 35. Nr. 6. 1918.

beobachteten Flächenstücks am Himmel und H die gefundene Himmelselligkeit, unter der Festsetzung, daß im Zenit die Helligkeit $H = 1$ herrscht. Die Messungen sind in einem Azimut von 90° , vom Sonnenvertikal aus gezählt, vorgenommen worden. Dieses Azimut wurde aus weiter unten ersichtlichen Gründen für die Darstellung bevorzugt.

In der Fig. 1 sind von O aus, dem Standpunkte des Beobachters, unter dem zugehörigen Zenitabstand z die Strecken

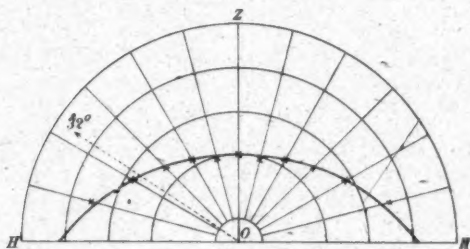


Fig. 1.

\sqrt{H} , welche den maximalen Sichtweiten entsprechen, als Vektoren aufgetragen und ihre Endpunkte miteinander verbunden. Ein Ansetzen des Zirkels lehrt, daß die so erhaltene Kurve mit sehr großer Genauigkeit ein Stück eines Kreises ist.

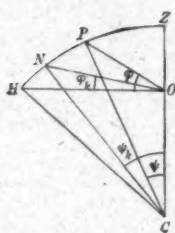


Fig. 1a.

In einem vorangehenden Bericht konnten wir zeigen, daß die Kugelkalotte eine gute Darstellung des Hauptverlaufs der Himmelsform gibt. Diese geometrische Eigenschaft gestattet eine Prüfung unserer Annahme, indem sich die nach der Kugelkalottentheorie errechneten Radiivektoren direkt gleich den photometrisch gefundenen \sqrt{H} in einer bestimmten Richtung ergeben müssen, wenn der Radiusvektor der Kalotte im Zenit gleich 1 und die Helligkeit in dieser Richtung ebenfalls gleich 1 gesetzt wird.

In der vorstehenden Zeichnung (Fig. 1a) bedeutet HZ die Hälfte des kalottenförmigen Bogens des vom Beobachter in O gesehenen Himmels. Ist N am Himmel ein beliebiger

Punkt, der unter dem wahren Winkel φ_k über dem Horizont liegt, so ist es unsere Aufgabe, das Verhältnis der Strecken $NO:OZ$ zu berechnen, wenn φ_k und die gemessene Höhe φ des geschätzten Halbierungspunktes P bekannt sind. Statt φ führen wir den zugehörigen Zentriwinkel ψ ein. Beide sind durch die Gleichung

$$\cos^3 \psi - \frac{3}{4}(1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi) \cos \psi = \frac{1}{4}(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)$$

miteinander verbunden. Aus Dreieck $NO C$ folgt

$$NO = \sin \psi_k : \cos \varphi_k.$$

Weiter ist $OZ = 1 - OC$ und da $OC = 1 \cdot \cos 2\psi$, so wird $OZ = 2\sin^2 \psi$ und

$$\frac{NO}{OZ} = \frac{\sin \psi_k}{\cos \varphi_k \cdot 2 \sin^2 \psi}$$

Hierin bestimmt sich der Winkel ψ_k aus

$$\cos(\varphi_k + \psi_k) = OC \cdot \cos \varphi_k = \cos 2\psi \cdot \cos \varphi_k.$$

Unser $\sqrt{H}:\sqrt{I}$ muß, falls die oben gegebene Darstellung richtig ist, für jeden Punkt am Himmel dem Ausdruck für $NO:OZ$ gleich sein. Mit seiner Hilfe haben wir die Werte für \sqrt{H} in den Tabellen berechnet. Die Übereinstimmung der berechneten Werte mit den gemessenen ist, unter Berücksichtigung der Fehler himmelsphotometrischer Messungen und mitspielender zufälliger Umstände in der Atmosphäre besonders bei den in Gümfar ausgeführten Beobachtungen (1—12) eine recht gute.

Daß die Möglichkeit der Konstruktion der Form des sichtbaren Himmelsgewölbes mit Hilfe der durch Himmelsheiligkeiten gemessenen Sichtweiten keinem rechnerischen Zufall zu verdanken ist, darin bestärkt die Tatsache, daß der geschätzte Halbierungspunkt des Bogens Horizont-Zenit in der Figur 32° über dem Horizont liegt. Aus 204 in den Monaten Februar bis Juni 1916 ausgeführten Schätzungen des Halbierungswertes am klaren Taghimmel hatte sich ein mittlerer Wert dieses Winkels von 32,03° ergeben.

In den Tabellen 2—10 und den dazugehörigen Figuren 2 bis 10 folgen eine Anzahl weiterer Himmelsheiligkeitsmessungen. Berechnungen und Formkonstruktionen für verschiedene Sonnenhöhen. Es sind jedesmal die Halbierungswerte der Gewölbe-

Tabelle 2.

Datum	ζ	H beob.	\sqrt{H} beob.	\sqrt{H} berech.
22. Juni 1916 $\varphi = 3,5^\circ$ vormittags	0°	1,00	1,00	1,00
	15	1,09	1,04	1,03
	30	1,23	1,11	1,11
	45	1,61	1,27	1,27
	60	2,36	1,54	1,53
	75	3,34	1,83	1,95
	85	6,05	2,46	2,36

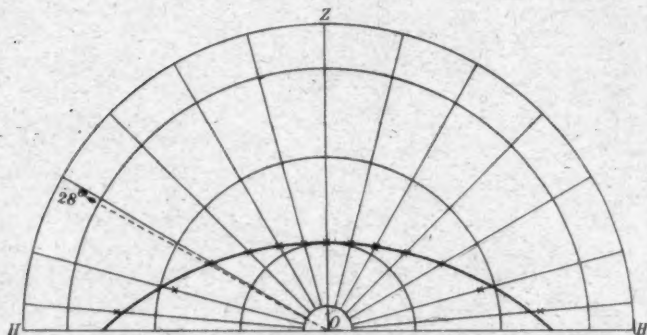


Fig. 2.

Tabelle 3.

Datum	ζ	H beob.	\sqrt{H} beob.	\sqrt{H} berech.
22. Juni 1916 $\varphi = 22,7^\circ$ nachmittags	0°	1,00	1,00	1,00
	15	1,00	1,00	1,02
	30	1,08	1,04	1,10
	45	1,54	1,24	1,23
	60	2,01	1,42	1,45
	75	3,21	1,79	1,78
	80	3,92	1,98	1,92

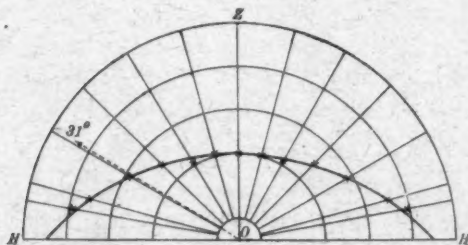


Fig. 3.

Tabelle 4.

Datum	ζ	H beob.	\sqrt{H} beob.	\sqrt{H} berech.
23. Juni 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 20,0^\circ$ vormittags	15	1,08	1,04	1,02
	30	1,21	1,10	1,09
	45	1,54	1,24	1,22
	60	2,04	1,43	1,42
	75	3,02	1,74	1,78
	80	4,22	2,05	1,85

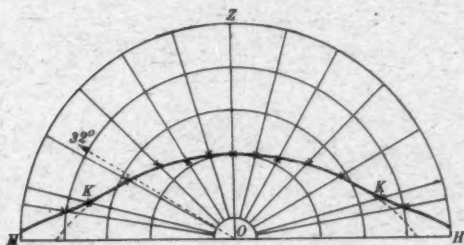


Fig. 4.

Tabelle 5.

Datum	ζ	H beob.	\sqrt{H} beob.	\sqrt{H} berech.
1. Juli 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 22,0^\circ$ nachmittags	15	0,91	0,95	1,02
	30	1,10	1,05	1,10
	45	1,44	1,20	1,23
	60	2,20	1,48	1,45
	75	3,22	1,79	1,78
	80	5,10	2,26	1,92

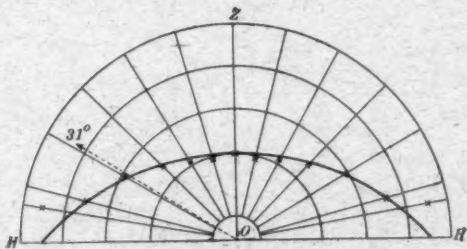


Fig. 5.

Tabelle 6.

Datum	ζ	H beob.	\sqrt{H} beob.	\sqrt{H} berech.
1. Juli 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$q = 1,0^\circ$ nachmittags	15	0,92	0,96	1,02
	30	0,92	0,96	1,10
	45	1,54	1,24	1,23
	60	2,08	1,44	1,45
	75	3,16	1,78	1,78
	80	4,28	2,07	1,92

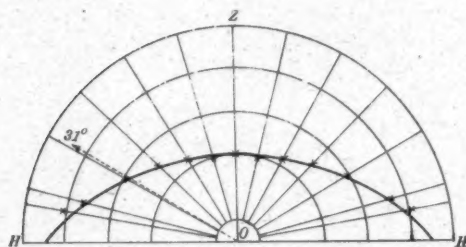


Fig. 6.

Tabelle 7.

Datum	ζ	H beob.	\sqrt{H} beob.	\sqrt{H} berech.
2. Juli 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$q = 5,5^\circ$ vormittags	15	1,01	1,00	1,02
	30	1,18	1,09	1,10
	45	1,47	1,21	1,24
	60	2,07	1,44	1,48
	75	3,45	1,86	1,84
	80	4,44	2,11	2,00

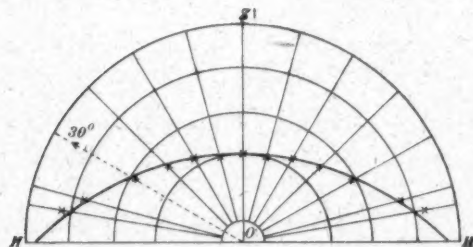


Fig. 7.

Tabelle 8.

Datum	z	H beob.	\sqrt{H} beob.	\sqrt{H} berech.
2. Juli 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 23,5^\circ$ nachmittags	15	1,07	1,03	1,03
	30	1,14	1,07	1,11
	45	1,66	1,29	1,26
	60	2,10	1,45	1,51
	75	3,55	1,88	1,90
	80	5,40	2,32	2,07

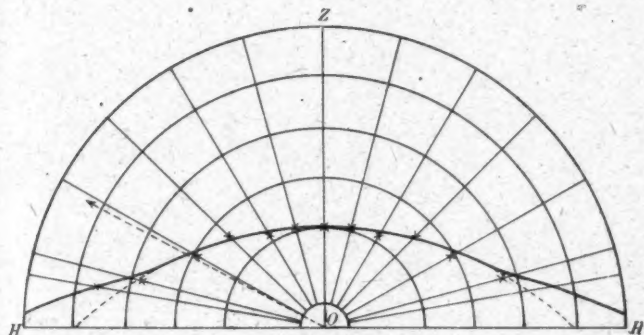


Fig. 8.

bögen angegeben, so wie sie graphisch gefunden wurden. Alle diese Winkel liegen innerhalb des Unsicherheitsbereiches unsrer früher ausgeführten Schätzungen. Den zugehörigen Berechnungen von \sqrt{H} ist jedesmal der in der Figur angegebene Halbierungswert zugrunde gelegt.

§ 4.

Die Betrachtung der Figuren und der berechneten Zahlen zeigt, daß die Punkte, welche den dicht über dem Horizont gemessenen entsprechen, nicht auf der Kugelkalotte liegen. Sie liegen so, daß sie einem flacheren Gewölbe zuzugehören scheinen als die übrigen Punkte. Diese Abweichung hat uns den Schlüssel für das Verständnis von Beobachtungen gegeben, die wir oft in unserem Beobachtungsjournal bemerkt haben, für welche wir aber bis dahin trotz mancherlei Bemühungen keine Deutung hatten finden können. An vielen klaren Tagen mit mittlerer

Tabelle 9.

Datum	z	H beob.	\sqrt{H} beob.	\sqrt{H} berech.
2. Juli 1916 $\varphi = 1,5^\circ$ nachmittags	0°	1,00	1,00	1,00
	15	0,98	0,99	1,02
	30	1,28	1,13	1,10
	45	1,58	1,26	1,24
	60	2,24	1,49	1,48
	75	3,45	1,86	1,84
	80	5,40	2,32	2,00

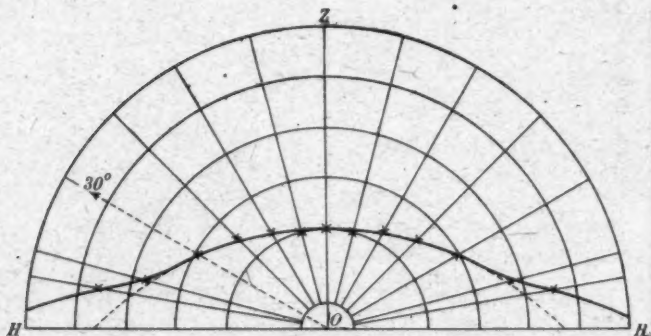


Fig. 9.

Weitsicht war es bei den Schätzungen der Halbierungswerte des Bogens Horizont-Zenit aufgefallen, daß der Himmel oft die Gestalt zeigte, wie sie besonders in den Figg. 4, 8 und 9 zu erkennen ist und die man mit Helmform bezeichnen kann. Einmal darauf aufmerksam geworden¹⁾, sieht man diese Gestalt fast täglich mehr oder weniger ausgeprägt, indem der in der Fig. 4 mit *K* bezeichnete Ansatz seine Höhe ändert. An wenig sichtigen Tagen und an ganz hervorragend klaren Tagen ist er nur schwach oder gar nicht zu erkennen.

Das Auftreten der Helmform erklärt sich jetzt ungezwungen aus einem starken Anwachsen der Himmelsheelligkeit nach dem Horizont hin, von etwa 75° Zenitdistanz an. Die photometrischen Messungen zeigen deutlich ein starkes An-

1) Um die Helmform zu erkennen, braucht man nur eine Himmelsstelle in etwa 45° über dem Horizont zu betrachten und dann langsam zum Horizont und wieder zurück zu blicken.

Tabelle 10.

Datum	z	H beob.	\sqrt{H} beob.	\sqrt{H} berech.
2. Juli 1916 $\varphi = -2,0^\circ$ nachmittags	0°	1,00	1,06	1,00
	15	0,92	0,96	1,02
	30	1,18	1,09	1,10
	45	1,53	1,24	1,23
	60	2,17	1,47	1,45
	75	3,20	1,79	1,78
	80	4,19	2,05	1,92

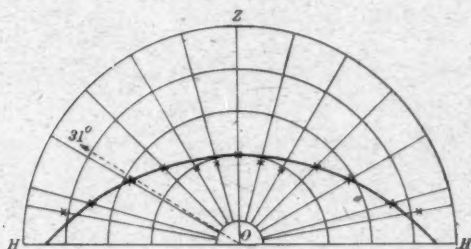


Fig. 10.

wachsen der Helligkeit des Himmels an dieser Stelle, aber auch das bloße Auge erkennt hier in den Subtropen an vielen Tagen die verhältnismäßig große Helle der dem Horizont unmittelbar anliegenden Luftschichten, bis zur Höhe von etwa 15° über dem Horizont. In der gleichen Weise wie die Helmform erklärt sich eine andere Abweichung von der normalen Himmelsform, die wohl auch schon oft bemerkt worden ist. Im Sonnenvertikal und in der Nähe der Sonne erscheint das Gewölbe nach oben hin ausgebogen, oft so stark, daß es die konvexe Seite nach der Erde zeigt. Solche Fälle sind in den Figg. 11 und 12 dargestellt und zwar nach in Güfmar ausgeführten Messungen.

Daß sich diese Erscheinung für das Auge, bei dem mächtigen Anwachsen der Helligkeit nach der Sonne zu, nicht stärker ausprägt, liegt daran, daß die Lichtempfindung im Auge bei großen einfallenden Lichtintensitäten nur noch sehr langsam ansteigt, d. h. daran, daß eine Blendung eintritt. Mit Hilfe der hier in Betracht kommenden psycho-physischen Gesetze wird es nicht schwer sein, die entsprechenden Korrekturen

Tabelle 11.

Datum	ζ	H beob.	\sqrt{H} beob.
22. Juni 1916 $\varphi = 35,0^\circ$ vormittags	0°	1,00	1,00
	15	0,99	0,99
	30	0,99	0,99
	45	1,29	1,14
	60	1,70	1,30
	75	2,66	1,63

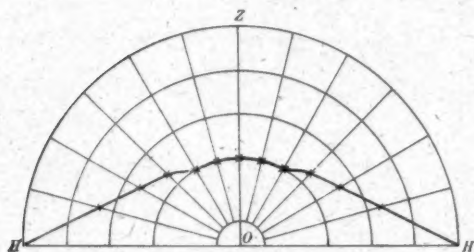


Fig. 11.

Tabelle 12.

Datum	ζ	H beob.	\sqrt{H} beob.
22. Juni 1916 $\varphi = 57,0^\circ$ vormittags	0°	1,00	1,00
	15	0,89	0,94
	30	0,84	0,92
	45	0,86	0,93
	60	1,01	1,00
	75	1,78	1,33

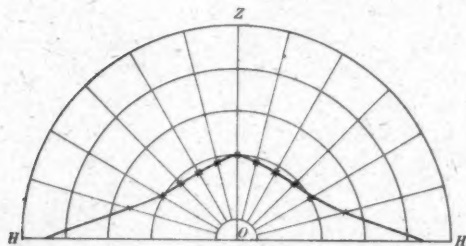


Fig. 12.

an der Gleichung (2) anzubringen, doch müssen wir aus Mangel an der einschlägigen Literatur davon absehen.

§ 5.

Um auch einen Vergleich mit an anderen Orten ausgeführten Beobachtungen zu ermöglichen, haben wir nach (2) die Quadratwurzeln der Himmelselligkeiten aufgetragen nach Messungen, die Schramm¹⁾ in Kiel angestellt hat. Tab. 13 und Fig. 13 gibt die Zahlen und die Form des erhaltenen Gewölbes wieder.

Tabelle 13.

Datum	ζ	H beob.	\sqrt{H} beob.
14. Januar 1900	0°	1,00	1,00
$\varphi = 5^\circ$ nachmittags	30	2,40	1,55
	60	5,57	2,36
	85	9,05	3,01

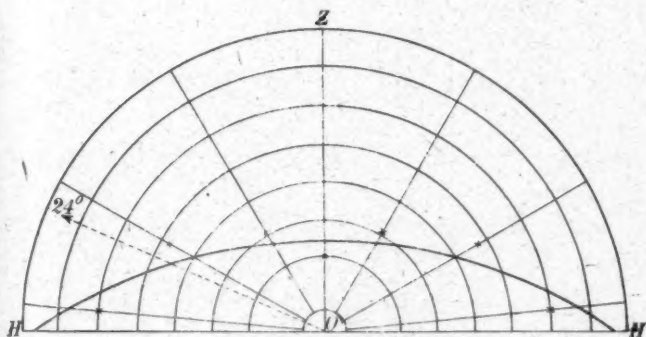


Fig. 13.

Die konstruierten Punkte liegen auch hier nahe auf einem Kreisbogen, dessen Halbierungswert rund 24° ist, in Übereinstimmung damit, daß die Reimannschen Werte der Höhe des geschätzten Halbierungspunktes für Deutschland niedriger (22°) sind als die unsrigen für Teneriffa (32°).

Eine weitere Bestätigung unserer Anschauung liefert die Chr. Wienersche Theorie der Helligkeit des klaren

1) W. Schramm, Kieler Dissertation 1901.

Tabelle 14.

	ξ	H der Theorie	\sqrt{H} der Theorie	$\sqrt{H} \cdot 22,3$
$\varphi = 0^\circ$	0°	0,00202	0,0449	1,00
	15	0,00226	0,0474	1,06
	30	0,00319	0,0564	1,26
	45	0,00420	0,0647	1,44
	60	0,00522	0,0722	1,61
	75	0,00682	0,0826	1,84
	90	0,01139	0,1067	2,39

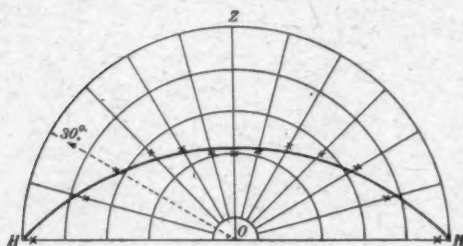


Fig. 14.

Tabelle 15.

	ξ	H der Theorie	\sqrt{H} der Theorie	$\sqrt{H} \cdot 5,6$
$\varphi = 85^\circ 16'$	0°	0,03165	0,178	1,00
	15	0,03154	0,177	0,99
	30	0,03056	0,175	0,98
	45	0,02902	0,170	0,95
	60	0,03100	0,176	0,99
	75	0,04024	0,201	1,13
	90	0,06697	0,259	1,45

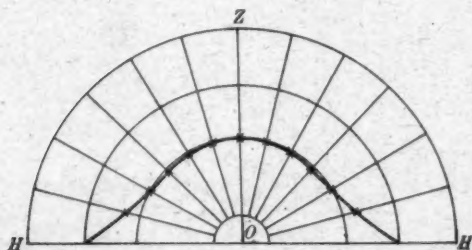


Fig. 15.

Himmels.¹⁾ Unter Berücksichtigung der direkten Sonnenstrahlung, der Zerstreuung des Lichts durch Beugung, Brechung und Reflexion an Wassertropfen, Eiskristallen und Staubeilchen, Reflexion durch den Erdboden und der Rayleighschen Diffusion durch die Luftmolekeln gelangt Wiener für die Helligkeit des Himmels an einer bestimmten Stelle für beliebige Sonnenstände zu exakten Zahlen. In der vorstehenden Tabelle und Fig. 14 haben wir aus Wieners Zahlen mit Hilfe von Gleichung (2) das Gewölbe konstruiert. Es ist mit großer Annäherung eine Kugelkalotte mit einem Halbierungswert des Bogens HZ von etwa 30° .

Für einen höheren Sonnenstand ($q = 35^\circ 16'$) folgt aus den Wienerschen Zahlen (siehe Tab. und Fig. 15) die Helmform des Himmelsgewölbes, gerade so wie sie die nach den photometrischen Messungen konstruierten Gewölbe und vielfache Skizzen unseres Beobachtungsjournals zeigen.

Nach dem Obigen genügt, besonders bei niederen Sonnenständen eine einzige Schätzung des Halbierungswertes des Bogens Horizont-Zenit, um die Verteilung der Himmelselligkeit in größerem Azimut vom Sonnenvertikal darzustellen. Für höhere Sonnenstände würde die im 3. Bericht geübte Unterteilung in Drittel und Viertel des Bogens Horizont-Zenit bei der Schätzung weiterhelfen.

§ 6.

Mit Hilfe der gleichzeitigen Verfolgung einer großen Anzahl gleichartiger Pilotballons mit dem Auge ließe sich in direkter Weise die Form des Himmels festlegen unter der Voraussetzung, daß die Entfernung Auge-Ballon im Augenblick des Verschwindens mit der kritischen Sichtweite identisch ist. Vom meteorologischen Observatorium auf Teneriffa wird seit einer Reihe von Jahren regelmäßig der Flug von Pilotballons beobachtet. Die im Jahre 1912 erreichten größten Höhen derselben waren am 13. Juni 24000 m und am 10. Juli 28400 m.²⁾

1) Chr. Wiener, Abhandlungen d. K. Leopold-Carol. Akad. d. Naturf. Nova Acta 73. Nr. 1. 1896: 91, Nr. 2. 1909.

2) Diese Zahlen sind dem Anuario del Observatorio Central Meteorológico zu Madrid (Supl. zum 1. Bd. 1916) entnommen, das wir der Freundlichkeit seines Direktors Sr. D. José Galbis Rodríguez verdanken.

Im ersten Falle war der Ballon vom Auge in direkter Verbindungslinie 39,5 km entfernt und verschwand in einer Höhe von $37^{\circ}23,5'$ über dem Horizont. Im zweiten Falle war die Entfernung 36,7 km bei einer Höhe von $50^{\circ}45,3'$.

Die Entfernungen 39,5 km und 36,7 km entsprechen der Strecke ON (Fig. 1a). Ist das sichtbare Himmelsgewölbe eine Kugelkalotte und läßt es sich auf diese Weise mit Pilotballons abtasten, so muß die aus diesen Zahlen berechnete horizontale Sichtweite OH mit der auf Teneriffa im Sommer herrschenden übereinstimmen. Die horizontale Sichtweite schwankt hier zwischen 50 und 100 km; für einen Sommertag mit mittlerer Sichtigkeit ist sie rund 70 km. Aus den Entwicklungen des § 3 sieht man leicht, daß

$$OH = ON \cdot \frac{\cos \varphi_k \cdot \sin 2\psi}{\sin \psi_k}$$

Hieraus rechnet sich unter Zugrundelegung eines Halbierungswertes für das Himmelsgewölbe von $\varphi = 32^{\circ}$ ($\psi = 25^{\circ}3,5'$) für $ON = 39,5$ km eine horizontale Sichtweite $OH = 64,4$ km und für $ON = 36,7$ km eine solche von 67,5 km; in guter Übereinstimmung mit der horizontalen Sichtweite eines mittleren Sommertages.

§ 7.

Für eine gleichmäßig helle, den Beobachter vollständig umgebende Lufthülle folgt aus Gleichung (2), daß die maximale Schichtweite nach allen Richtungen darin gleich groß ist, d. h. daß ein Gewölbe gesehen wird mit einem Halbierungswert von 45° . Ist die Helligkeit am Horizont größer als in den übrigen Teilen, so ergibt sich ein Halbierungswert $< 45^{\circ}$, ist der Horizont dunkler als das Übrige, so ist der Halbierungswert $> 45^{\circ}$.

Wir haben diese Folgerungen einer direkten Prüfung innerhalb einer homogenen, hellen Nebelschicht unterzogen. In der folgenden Tab. 16 sind die Resultate chronologisch aufgeführt so wie sie sich bei einer Wanderung in einer Wolken-schicht ergeben haben.

Aus den Zahlen dieser Tabelle ist deutlich zu erkennen, wie sich das flache Gewölbe — mit kleinem Halbierungs-

Tabelle 16.
Beobachtungen im hellen Nebel.

Nr.	Tageszeit	Höhe ü. d. Meere	Halbierungswerte				Ge- mein- same Mittel	Bemerkungen
			D.	Mittel	U.	Mittel		
	20. 5. 1917							
1	8 ^h 10 v.	508 m	24,0°		25,7°		24,85°	Oberhalb Gålmar's Am unteren Rand der Wolke.
2	8 ^h 25	544	36,0 37,0	36,5	38,0 37,0	37,5	37,0	Vornan im Nebel.
3	8 ^h 38	617	40,2 39,0 42,5	40,2	42,0 43,0 45,0	43,6	41,9	
4	9 ^h 10	685	42,0 45,1 39,2	41,75	41,0 41,2 40,7	40,95	41,35	Ganz im hell. Nebel.
5	9 ^h 30	741	46,3 42,0 40,5 44,5 46,0 44,0	43,9	45,3 42,3 41,2 45,8 50,0 38,0	44,9	44,4	Tiefer im Nebel. Windstill.
6.	10 ^h 6	790	43,8 49,0 40,0 42,5 44,0	43,9	49,8 45,1 46,5 47,2 44,2	46,6	45,25	Nach der helleren Sonnenseite beob. Aufhorizontal. Stelle nach der Richtung eines Bergrückens gesehen. Oben et- was hell. als unten. Improvisiert. Dia- phanometerver- such ergibt als Sichtweite 35 m.
7			41,0					Nach der Sonnen- seite gemessen.
8	10 ^h 45	684	40,4 40,8 37,0 39,0 44,8	40,4	44,4 40,7 43,0 42,5	42,65	41,5	Nach der helleren Meeresseite beob.
9		684	46,0 47,4 44,8	46,1	48,2 47,0 43,8	46,3	46,2	Nach der Landseite gemessen, wo der untere Teil des Nebels dunkler war, als oben.
10		684	$\frac{3}{4}$ Wert = 70,0°					

wert — unterhalb des Nebels, wo noch der helle klare Himmel den Horizont bildet, in das höhere im Innern des Nebels umwandelt. Bei dem Augenschein nach gleichmäßiger Helligkeit des Nebels (Nr. 5 der Tabelle) ist der Halbierungswert nahezu 45° . In den Fällen, wo der obere Teil heller war als der untere (Nr. 6 und 9) ist die Sichtweite nach oben größer als in der horizontalen oder einer dieser Richtung nahen gewesen. Der unter Nr. 10 angeführte Wert für die Höhe des als $\frac{3}{4}$ des Bogens geschätzten Punktes liegt, der oberen Helligkeit entsprechend, zu hoch, statt bei $67,5^\circ$ der Halbkugel bei 70° .

Da selbst der sternenhelle Nachthimmel am Horizont eine etwas größere Helligkeit als im Zenit besitzt, so folgt auch für ihn eine entsprechende geringe Abweichung von der Halbkugelform und es erklärt sich so der von uns in dem vorangehenden Bericht angegebene Halbierungswert von $42,9^\circ$ statt 45° für den klaren Nachthimmel.

Welchen Einfluß die horizontale und zenitale Helligkeit auf die Wölbung des Himmels haben, davon haben wir uns durch die folgenden Versuche überzeugt, die gleichzeitig einen Beweis bringen, daß die Resultate der im hellen Nebel ausgeführten Beobachtungen auf die Atmosphäre übertragen werden dürfen.

Blickt man den Himmel durch eine dunkelblaue Glasscheibe genügender Größe an — wir benutzten zu dem Zwecke eine kobaltblaue Scheibe von $45 \times 52 \text{ cm}^2$ —, so werden die großen Helligkeitsunterschiede ausgeglichen. Die unteren atmosphärischen Schichten, welche überwiegend langwellige Strahlen aussenden, die teilweise von dem blauen Glase absorbiert werden, erscheinen dunkler als vorher und in ihrem Helligkeitsgrade von der zenitalen Helligkeit wenig verschieden. Wie es nach dem Vorangehenden zu erwarten war, ergaben die durch die blaue Glasscheibe hindurch ausgeführten Versuche daher erhöhte Halbierungswerte. In Tab. 17 sind zwei Beobachtungsreihen angeführt.

Ein genügend großes, rotes Glas stand uns leider nicht zur Verfügung, doch zeigten schon durch eine kleine ($9 \times 12 \text{ cm}^2$) Scheibe angeführte Schätzungen, daß der Himmel infolge der großen Dunkelheit im Zenit und dagegen auffallender Helle der Horizontschichten eine sehr flachgewölbte Gestalt besaß.

Tabelle 17.

Halbierungshöhen durch eine blaue Scheibe hindurch.

Blanes Glas		Ohne Glas		Beobachter und Datum
	Mittel		Mittel	
40,0°		30,0°		D. 19. 6. 1917
41,5		31,0		
38,3		33,0		
38,8		32,8		
40,6	39,3°		31,7°	
38,0°		30,0°		U. 22. 6. 1917
42,0		30,5		
39,5	39,5°	32,0	30,8°	

Es ergaben sich Halbierungswerte von 24,3°; 25,0°; 25,0°; 24,0°.

§ 8. Resultate.

1. Die sichtbare Form des Himmelsgewölbes wird bedingt durch die in verschiedenen Richtungen verschiedene kritische oder maximale Sichtweite und nicht durch physiologische oder psychologische Ursachen.

2. Zwischen den Sichtweiten und den Himmelsheiligkeiten besteht eine einfache Beziehung, die es ermöglicht, die Himmelsform mit Hilfe photometrischer Helligkeitsmessungen geometrisch darzustellen.

Die Möglichkeit der Durchführung dieser Untersuchung verdanken wir Mitteln, welche die kartellierten Deutschen Akademien, sowie die Solvaystiftung zur Verfügung gestellt haben.

Güímar auf Teneriffa, Juni 1917.

(Eingegangen 28. Februar 1919.)

**2. Versuch zu einer Erweiterung der Planckschen
Theorie der verdünnten Lösungen;
von P. Boedke.**

Planck weist in seinen „Vorlesungen über Thermodynamik“¹⁾ darauf hin, daß die weitere Auswertung der von ihm für die fundamentalen thermodynamischen Funktionen angegebenen Reihenentwicklungen ein gangbarer Weg sein dürfte, um zu einer rationellen thermodynamischen Theorie von Lösungen beliebiger Konzentration zu gelangen. Seit das Problem von Planck gestellt wurde, hat wohl zuerst und auch allein H. Jahn versucht, die mathematische Theorie der Lösungen in der angedeuteten Richtung auszubauen.²⁾ Während die Plancksche Theorie der ideal verdünnten Lösungen in den erwähnten Reihenentwicklungen nur die Glieder der ersten Ordnung berücksichtigt, untersuchte Jahn den Einfluß der Glieder der zweiten Ordnung. Wenn nun auch durch die so erhaltenen erweiterten Ansätze ein näherer Anschluß der Theorie an die vorliegenden Versuchsdaten erreicht wird, so bleiben die Jahnschen Ergebnisse doch insofern unbefriedigend, als gewisse charakteristische Erscheinungen in höher konzentrierten Lösungen auch durch sie immer noch nicht und zwar nicht einmal andeutungsweise dargestellt werden. Wie nun die Hauptbedeutung der Van der Waalschen Gleichung einer einheitlichen Flüssigkeit nicht etwa in der damit erzielten zahlenmäßigen Übereinstimmung von Theorie und Versuch liegt — diese ist bekanntlich sogar verhältnismäßig wenig befriedigend —, sondern vielmehr darin zu suchen ist, daß die Verdampfungserscheinungen und der kritische Zustand in ihr eine qualitativ zutreffende Darstellung finden, so erscheint auch in der Theorie der Lösungen ein Ansatz als das zunächst erstrebenswerte Ziel, aus dem sich

1) 3. Auflage, Leipzig 1911, § 252.

2) Zeitschr. f. phys. Chemie **41**. S. 257. 1902.

das charakteristische Verhalten hoch konzentrierter Lösungen, wenn auch vorläufig rein qualitativ ableiten läßt.

Da die Jahnschen Rechnungen nicht zu dem gewünschten Ergebnis führten, so mußte man in konsequenter Fortsetzung des einmal eingeschlagenen Weges nunmehr den Einfluß der Reihenglieder von der dritten Ordnung untersuchen. Die betreffenden Rechnungen gestalten sich jedoch überaus langwierig und scheinen jedenfalls nicht in einfacher Weise übersichtliche Resultate zu ergeben. Im folgenden wird deshalb versucht, in anderer Weise an die Planckschen Gesetze ideal verdünnter Lösungen anzuknüpfen.

In der Tat läßt sich eine Funktion aus ihrer Reihenentwicklung zwar einerseits mit um so größerer Genauigkeit bestimmen, je mehr Reihenglieder man berücksichtigt. Andererseits kann man aber auch durch passende Wahl des Arguments, nach dem man die Funktion entwickelt, häufig eine stärkere Konvergenz der Reihe erzielen und dadurch unter Berücksichtigung einer gleichen Anzahl von Reihengliedern wie vorher einen besseren Anschluß an die wahren Funktionswerte erreichen. Im folgenden wird deshalb versucht, die Reihenentwicklungen der thermodynamischen Funktionen nach einem anderen Argument als dem von Jahn gewählten vorzunehmen und auf diese Weise infolge gegebenenfalls besserer Konvergenz der Reihen immer noch allein mit den Gliedern der zweiten Ordnung auszukommen.

Ein Urteil darüber, ob ein Argument zweckmäßiger als ein anderes ist, kann man in dem hier vorliegenden Falle naturgemäß nur aus dem Umfange gewinnen, in welchem die erhaltenen Ansätze die charakteristischen Eigenschaften der Lösungen darstellen. Zur Prüfung dieses Geltungsbereiches wählen wir zunächst ein ganz spezielles, möglichst leicht zu übersehendes Beispiel; es wird im folgenden allein versucht, an der Hand der vorgenommenen Reihenentwicklungen die Erscheinungen der Sättigung und der kritischen Löslichkeit in binären flüssigen Gemischen, wie sie vor allem von Rothmund¹⁾ systematisch beobachtet worden sind, abzuleiten. In der Tat sind diese Erscheinungen für unseren Zweck besonders geeignet; denn sie spielen sich wesentlich nur in Gebieten

1) Zeitschr. f. phys. Chemie 26. S. 433. 1898.

höherer Konzentration ab und sind, wie im folgenden gezeigt wird, weder mit Hilfe der Planckschen Gleichungen für ideal verdünnte Lösungen, noch auch mit Hilfe der erweiterten Jahnschen Gleichungen darstellbar. Die Planck-Jahnschen Gleichungen ergeben zwar eine Formulierung der Zustandsänderungen in den beiderseits hochverdünnten Gebieten solcher Gemische, gestatten aber nicht, an der Hand einer und derselben Gleichung die Erscheinungen, wie sie sich bei allmählicher Änderung der Konzentration zwischen den beiden Grenzgebieten abspielen, stetig zu verfolgen. Dies scheint nun mit Hilfe der im folgenden angegebenen Entwicklungen möglich zu sein. Ob danach den neuen Ansätzen eine tiefer liegende Bedeutung beigemessen werden kann, müssen allerdings erst noch weitergehende Untersuchungen entscheiden, auf die in dieser Mitteilung noch nicht eingegangen wird.

1. Über die Reihenentwicklungen der Planckschen Φ -Funktion.

Betrachten wir eine zunächst als verdünnt anzusehende Lösung, deren Zustand durch den Druck p , die Temperatur T und die Massen m_0, m_1, m_2, \dots der einzelnen Bestandteile bzw. durch deren Moleküllzahlen n_0, n_1, n_2, \dots bestimmt ist. Es sei R die absolute Gaskonstante, $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ seien die bezüglichen Molekulargewichte, m sei die Gesamtmasse, n die Summe der Moleküllzahlen, c_0, c_1, c_2, \dots seien die molekularen, $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots$ die molaren Konzentrationen, also z. B. sei

$$c_0 = \frac{n_0}{n}, \quad \bar{c}_0 = \frac{m_0}{m}.$$

Überhaupt seien durchgängig die bei Benutzung der Massen an Stelle der Moleküllzahlen einzuführenden Größen überstrichen. Bezieht sich der Index 0 auf das Lösungsmittel, so sind die Größen $m_1, m_2, n_1, n_2, c_1, c_2, \bar{c}_1, \bar{c}_2$ usw. sämtlich klein gegen die bezüglichen Größen mit dem Index 0.

Wir vergleichen unter diesen Voraussetzungen die vier Entwicklungen der Planckschen Φ -Funktion

$$(1) \quad \Phi = -R \sum n_0 \log c_0 + n_0 \mathfrak{P} \left(\frac{n_1}{n_0}, \frac{n_2}{n_0}, \dots \right),$$

$$(2) \quad \Phi = -R \sum n_0 \log \bar{c}_0 + n_0 \mathfrak{Q} (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots),$$

$$(3) \quad \Phi = -\sum r_0 m_0 \log \bar{c}_0 + m_0 \mathfrak{P} \left(\frac{m_1}{m_0}, \frac{m_2}{m_0}, \dots \right),$$

$$(4) \quad \Phi = -\sum r_0 m_0 \log \bar{c}_0 + m \mathfrak{Q} (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots).$$

Darin bedeuten r_0, r_1, r_2, \dots Konstante, \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} sind Potenzreihen der angegebenen Argumente, deren Koeffizienten durch φ mit gehöriger Indizierung bezeichnet seien.

Die Entwicklung (1) ist von Planck angegeben worden. Unter Berücksichtigung von Gliedern nur der ersten Ordnung erhält man den Ansatz

$$\Phi = n_0(\varphi_0 - R \log c_0) + n_1(\varphi_1 - R \log c_1) + n_2(\varphi_2 - R \log c_2) \dots,$$

auf dem sich die Plancksche Theorie der ideal verdünnten Lösungen aufbaut. Nimmt man noch die Glieder zweiter Ordnung mit hinzu, so erhält man die Ausgangsgleichung für die Jahnschen Rechnungen, die z. B. für eine binäre Lösung die Form hat

$$\Phi = n_0(\varphi_0 - R \log c_0) + n_1(\varphi_1 - R \log c_1) + \frac{n_1^2}{n_0} \varphi_{11}.$$

Die Entwicklungen (2), (3), (4) folgen am einfachsten durch Umformung von (1). Ersetzt man mit Hilfe der Beziehung

$$n_0 = n [1 - (c_1 + c_2 + c_3 + \dots)]$$

die Molekülzahl des Lösungsmittels durchweg durch die Gesamtzahl n der Moleküle und entwickelt danach alle Glieder nach Potenzen von c_1, c_2, \dots , so erhält man (2). Die dritte Form der Entwicklung ergibt sich aus (1), wenn man überall statt der molekularen Größen die molaren einführt und danach nach den Potenzen von $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots$ entwickelt. Aus (3) folgt schließlich (4) auf die gleiche Weise wie (2) aus (1). Zwischen den Koeffizienten der Entwicklungen bestehen natürlich Beziehungen; so ist vor allem

$$(5) \quad R = r_1 \mu_1 = r_2 \mu_2 = \dots \text{ usw.}$$

Über die Konvergenz der Reihen läßt sich von vornherein nichts aussagen. Es ist möglich, daß sie in allen Konzentrationsgebieten Gültigkeit haben oder nur in gewissen beschränkten Bereichen anwendbar sind. Im letzten Falle würde es unmöglich sein, die Erscheinungen, wie sie sich bei fortgesetzter Erhöhung der Konzentration irgendeines Bestandteils in einer zunächst verdünnten Lösung zeigen, stetig an der Hand einer dieser Potenzentwicklungen zu verfolgen. Für unsere Betrachtungen im folgenden müssen wir deshalb ausdrücklich zweierlei voraussetzen: Einerseits soll sich der Konvergenzbereich der benutzten Reihen bis in das Gebiet höherer

Konzentrationen hineinerstrecken, zweitens soll die Konvergenz eine derartig schnelle sein, daß eine wenigstens qualitativ zutreffende Beurteilung der Erscheinungen schon bei Berücksichtigung der Glieder bis zur zweiten Ordnung möglich ist. Ob diese Voraussetzungen zulässig sind, kann natürlich nur der Vergleich mit der Erfahrung entscheiden.

Jedenfalls scheinen die Entwicklungen (2), (4) diesen Annahmen mehr zu entsprechen als (1), (3). Wird nämlich z. B. in einem binären Gemisch durch ständig verstärkte Konzentration des gelösten Stoffes allmählich die andererseits verdünnte Lösung hergestellt, so steigt gleichzeitig das Argument n_1/n_0 bzw. m_1/m_0 der Entwicklungen (1), (3) zu unendlich an. Gesetzt selbst den Fall, daß die Entwicklungen in diesem Grenzgebiet noch konvergierten, so kann man dann doch nicht mehr die Funktion durch die beiden ersten Reihenglieder approximieren. Sonach ist es z. B. ausgeschlossen, an der Hand des Jahnschen Ansatzes das Gesamtgebiet aller Konzentrationen zu überblicken. Bei den Entwicklungen (2), (4) werden die Argumente in dem betrachteten Grenzfall nahezu gleich 1; die Verhältnisse liegen hier für das Vordringen der Theorie in Gebiete höherer Konzentrationen also ungleich günstiger.

Die Entwicklungen (3), (4) sind überall da von Bedeutung, wo es sich um Anwendung der Theorie auf Beobachtungen mit molaren Konzentrationen handelt. Allerdings kann man auch in solchen Fällen von den molekularen Ansätzen ausgehen und die aus diesen entwickelten Ergebnisse dann auf die molare Form bringen. Da die Vernachlässigungen, die man auf dem einen und dem anderen Wege begeht, verschieden sind, so fallen auch die Ergebnisse verschieden aus. Welcher von beiden Wegen einen besseren Anschluß an die vorliegenden Versuchsdaten ergibt, das kann natürlich auch erst wieder hinterher entschieden werden. Jedenfalls müssen wir uns für Anwendungen auf solche molaren Beobachtungen zunächst beide Möglichkeiten offen halten.

Der ursprüngliche Plancksche Ansatz (1) wird bekanntlich durch Vergleichung mit Entwicklungen gewonnen, die für die in den idealen Gaszustand übergeführte Lösung gelten. Dieser Vergleich ist bei den Entwicklungen (3), (4) nicht mehr unmittelbar durchführbar, da bei der Einführung der molaren

Konzentrationen das logarithmische Glied zum Teil in die Potenzreihen eingeht. Das kann aber natürlich nicht als ein Grund gegen den Gebrauch dieser beiden Ansätze geltend gemacht werden; denn bei passender Umordnung der Glieder in diesen Entwicklungen oder der bezüglichen Glieder in den Gesetzen für den idealen Gaszustand läßt sich der Vergleich wieder vornehmen.

Für den weiteren Gebrauch stellen wir die vier auf Glieder zweiter Ordnung abgekürzten Entwicklungen für binäre Gemische zusammen.

$$(6) \quad \Phi = n_0(\varphi_0 - R \log c_0) + n_1(\varphi_1 - R \log c_1) + \frac{n_1^2}{n_0} \varphi_{11},$$

$$(7) \quad \Phi = n_0(\varphi_0 - R \log c_0) + n_1(\varphi_1 - R \log c_1) + \frac{n_1^3}{n} \varphi_{11},$$

$$(8) \quad \Phi = m_0(\varphi_0 - r_0 \log \bar{c}_0) + m_1(\bar{\varphi}_1 - r_1 \log \bar{c}_1) + \frac{m_1^3}{m_0} \bar{\varphi}_{11},$$

$$(9) \quad \Phi = m_0(\bar{\varphi}_0 - r_0 \log \bar{c}_0) + m_1(\varphi_1 - r_1 \log \bar{c}_1) + \frac{m_1^3}{m} \bar{\varphi}_{11},$$

Der geringfügige Unterschied in den quadratischen Zusatzgliedern von (7), (9) gegenüber denen in (6), (8) bewirkt, daß diese Ansätze, wie im folgenden gezeigt werden soll, für höhere Konzentrationen brauchbar werden.

2. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für ein binäres Gemisch.

Die Bedingungen für das stabile Gleichgewicht eines aus α unabhängigen Bestandteilen bestehenden Systems gegen Zustandsänderungen, bei denen Druck, Temperatur und die Gesamtmassen aller α Bestandteile ungeändert bleiben, lauten nach Planck

$$\delta \Phi = 0, \quad \delta^2 \Phi < 0.$$

Hierin führen wir die spezifischen Werte φ' , φ'' usw. der Potentialfunktion Φ in den einzelnen Phasen und die Konzentrationen c ein. Um nur mit unabhängigen Variablen zu operieren, denken wir uns eines der c , etwa c_a , durch die übrigen ersetzt; ferner sei noch zur Abkürzung

$$f_v = \frac{d\varphi}{dc_v} = \frac{\partial \varphi}{\partial c_v} - \frac{\partial \varphi}{\partial c_a}.$$

Für die Erscheinungen der gegenseitigen Löslichkeit lassen sich dann die obigen Gleichgewichtsbedingungen in der Form aussprechen: In allen Phasen besitzen gleiche Werte

(10) 1. jede der Größen f_1, f_2, \dots, f_{a-1} .

(11) 2. die Größen $\varphi - c_1 f_1 - c_2 f_2 - \dots - c_{a-1} f_{a-1}$

und zwar gelten diese Bedingungen, wenn noch vorausgesetzt wird, daß das Molekulargewicht jedes Bestandteils in allen Phasen das gleiche ist, sowohl für die molare als auch für die molekulare Form der Gleichungen, d. h. für die ungestrichenen Größen ebenso wie für die überstrichenen.

Die hieraus abzuleitenden Bedingungen für die Erscheinungen der Sättigung und der kritischen Löslichkeit binärer Gemische lassen sich in einer Form hinschreiben, in der sie vollkommene Analogie mit gewissen aus der Theorie der Zustandsgleichung einer einheitlichen Substanz bekannten Gesetzmäßigkeiten zeigen. Wird bei der von jetzt ab allein auftretenden Größe f_1 der Einfachheit halber der Index fortgelassen, so gelten folgende Sätze:

1. In beiden Phasen eines binären flüssigen Systems ist

$$(12) \quad \frac{df}{dc_1} < 0.$$

2. Die Größe f hat in beiden Phasen den gleichen Wert

$$(13) \quad f' = f''.$$

Für f' und f'' wird deshalb einfach f geschrieben.

3. Analog zum Maxwell-Clausiuschen Satze bei der Zustandsgleichung ist

$$(14) \quad -f' f \frac{df}{dc_1} = \varphi' - \varphi'' = f(c_1' - c_1'').$$

4. Der kritische Lösungspunkt wird bestimmt durch

$$(15) \quad \frac{\partial f}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial c_1^2} = 0.$$

Die Differentiationen und Integrationen sind hierbei bei konstant gehaltenen Werten des Drucks und der Temperatur vorzunehmen.

Die Größen f, c_1, T spielen hier sonach bezüglich genau die gleiche Rolle, wie der Druck p , das Volumen v und die Temperatur T in der Theorie der Zustandsgleichung. Wie nun bekanntlich die Zustandsgleichung in übersichtlicher Weise durch die graphische Darstellung der Isothermen in einem p, v -Diagramm versinnlicht wird, so werden sich demnach in ganz ähnlicher Weise die Eigenschaften binärer Ge-

mische durch Zeichnung der Isothermen in einem f, c_1 -Diagramm geometrisch interpretieren lassen. Das von uns zu lösende Problem kann dann in rein geometrischer Form so ausgesprochen werden: Es ist das spezielle Isothermensystem zu suchen, das als Träger der angegebenen Eigenschaften geeignet ist und in der Grenze die bekannten Eigenschaften der ideal verdünnten Lösungen ergibt. Ein solches Isothermensystem müßte den kritischen Punkt als singulären Punkt enthalten, auf der einen und nur der einen Seite der durch diesen Punkt hindurchgehenden Isotherme Maxima und Minima zeigen und in dem Grenzgebiet idealer Verdünnung in die durch die Plancksche Näherung bestimmten Isothermen übergehen. Im folgenden Abschnitt werden deshalb zunächst die Planckschen Isothermen besprochen, dann wird gezeigt, daß die aus dem Jahnschen Ansatz entspringenden Isothermen keinen geeigneten Träger bilden, während die Ansätze (7), (9) zu Isothermen führen, die alle nötigen Eigenschaften haben, und (9) zudem noch quantitativen Anschluß an die vorliegenden Versuchsergebnisse zeigt.

8. Anwendungen.

Aus (6), (7), (8), (9) leiten wir zunächst die auf die Einheit der Moleküllzahl bzw. der Masse bezogenen Werte φ der Funktion Φ und die daraus abgeleiteten Größen her. Der Einfachheit halber schreiben wir nur die molare Form der Gleichungen hin und unterdrücken dabei die Überstreichung; eine Verwechslung der beiden Gleichungsformen erscheint ausgeschlossen, da die molare Form an den Größen r_0, r_1 kenntlich bleibt, die für die molekulare Form beide gleich R werden. Es wird für

Jahns Ansatz:

$$(16) \left\{ \begin{aligned} \varphi &= c_0 (\varphi_0 - r_0 \log c_0) + c_1 (\varphi_1 \\ &\quad - r_1 \log c_1) + \frac{c_1^2}{c_0} \varphi_{11}, \end{aligned} \right.$$

$$(17) \left\{ \begin{aligned} f &= (r_0 - \varphi_0 - r_1 + \varphi_1 - \varphi_{11}) \\ &\quad + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 + \frac{\varphi_{11}}{c_0}, \end{aligned} \right.$$

$$(18) \frac{df}{dc_1} = -\frac{r_0}{c_0} - \frac{r_1}{c_1} + \frac{2\varphi_{11}}{c_0^2},$$

$$(19) \frac{d^2f}{dc_1^2} = -\frac{r_0}{c_0^2} + \frac{r_1}{c_1^2} + \frac{6\varphi_{11}}{c_0^3};$$

Ansatz (7), (9):

$$\varphi = c_0 (\varphi_0 - r_0 \log c_0) + c_1 (\varphi_1 - r_1 \log c_1) + c_1^2 \varphi_{11},$$

$$f = (r_0 - \varphi_0 - r_1 + \varphi_1) + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 + 2c_1 \varphi_{11},$$

$$\frac{df}{dc_1} = -\frac{r_0}{c_0} - \frac{r_1}{c_1} + 2\varphi_{11},$$

$$\frac{d^2f}{dc_1^2} = -\frac{r_0}{c_0^2} + \frac{r_1}{c_1^2}.$$

I. Die Planckschen Isothermen. Die durch $\varphi_{11} = 0$ aus allen Ansätzen gleichmäßig folgende Gleichung der Isothermen für ideal verdünnte Lösungen ist

$$(20) \quad f = f_{01} + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1.$$

Dabei faßt die Größe

$$f_{01} = r_0 - \varphi_0^0 - r_1 + \varphi_1^0$$

die allein von Druck¹⁾ und Temperatur abhängigen Glieder zusammen, worin der an die Größen φ herangefügte obere Index andeutet, von welchem Stoff bei Herleitung des Ansatzes als Lösungsmittel ausgegangen wurde. Aus (15), (18), (19) ergibt sich für den kritischen Punkt

$$\frac{r_0}{c_0} + \frac{r_1}{c_1} = 0, \quad \frac{r_0}{c_0^2} - \frac{r_1}{c_1^2} = 0.$$

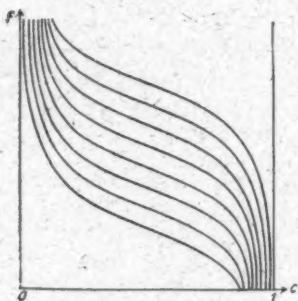


Fig. 1.

Da die erste dieser beiden Gleichungen mit der zweiten und zudem mit den Bedingungen

$$c_0 + c_1 = 1,$$

$$0 < c_0, c_1 < 1$$

unverträglich ist, so enthält der Plancksche Ansatz den kritischen Punkt nicht. In der Tat bestehen die Isothermen aus lauter kongruenten, nur in der Richtung der f -Achse gegeneinander verschobenen Kurven von der in Fig. 1 dar-

gestellten Form ohne Maxima und Minima mit einem Krümmungswechsel an der Stelle

$$c_0 = \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}}, \quad c_1 = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_0}},$$

an der die Tangente die durch

$$\frac{df}{dc_1} = -(\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1})^2$$

1) Nach Rothmund, a. a. O., sind die Sättigungserscheinungen in weitem Umfange vom Druck unabhängig, so daß schlechthin von Isothermen gesprochen werden kann.

bestimmte Richtung hat. Für die molekulare Form liegt der Krümmungswechsel bei

$$c_0 = c_1 = \frac{1}{2}$$

und die Tangente hat hier die Richtung

$$\frac{df}{dc_1} = -4R.$$

Nach der Ableitung von (20) haben die Kurven zunächst nur für sehr kleine Werte von c_1 physikalische Bedeutung als Isothermen. Erst dadurch, daß der für die andererseits hochverdünnte Lösung gültige Wert

$$f = f_{10} + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1,$$

wo

$$f_{10} = r_0 - \varphi_0^1 - r_1 + \varphi_1^1,$$

dieselbe Kurvenschar ergibt, erhält auch das Gebiet der Werte von f für c_1 nahe 1 entsprechende Bedeutung. Damit ist allerdings noch nicht verbürgt, daß Anfang und Ende einer Kurve auch zur gleichen physikalischen Isotherme gehören. Dies ist nur der Fall, wenn

$$f_{01} = f_{10}, \\ \varphi_0^0 + \varphi_1^1 = \varphi_0^1 + \varphi_1^0,$$

also nur, wenn die von Lösungsmittel und gelöstem Stoff abhängigen Größen φ_0^1 und φ_1^0 eine ganz bestimmte Bedingung erfüllen. Tun sie dies nicht, so wird der Anfang einer Kurve durch einen ganz anderen mittleren Isothermenverlauf als er dem Planckschen Ansatz entspricht in das Ende einer anderen Kurve übergeführt.

Dies im wesentlichen negative Ergebnis hat immerhin insofern eine physikalische Bedeutung, als dadurch eine Abschätzung des Gültigkeitsbereichs dieser ersten Näherung möglich wird. Dieser Bereich wird sicher beschränkt durch die Konzentrationsgebiete, innerhalb welcher sich die kritischen Erscheinungen abspielen und das sind teilweise Gebiete, innerhalb welcher die Lösungen schon als verdünnt bezeichnet werden müssen.

II. Die Jahnschen Isothermen. Ebensowenig wie diese erste Näherung führt auch in der Jahnschen Form die zweite Näherung zu einem kritischen Punkt. Dieser ist nämlich nach (15), (18), (19) jetzt an die Bedingungen

$$\frac{r_0}{c_0} + \frac{r_1}{c_1} = \frac{2\varphi_{11}}{c_0^3}, \quad \frac{r_0}{c_0^3} - \frac{r_1}{c_1^3} = \frac{6\varphi_{11}}{c_0^4}$$

gebunden, woraus durch Elimination von φ_{11}

$$\frac{2r_0}{c_0^2} + \frac{3r_1}{c_0 c_1} + \frac{r_1}{c_1^2} = 0$$

folgt. Diese Gleichung ist aber unmöglich, da darin die Summe dreier wesentlich positiver Größen verschwindet. Noch deutlicher wird dies in der molekularen Form, in der sich für den kritischen Punkt

$$c_0 = 2, \quad c_1 = -1$$

ergibt. Auch allein aus der Betrachtung von φ_{11} kann man die Ungeeignetheit des Jahnschen Ansatzes zur Darstellung der kritischen Erscheinungen erkennen. Entweder nämlich ist φ_{11} positiv, dann wird f für $c_1 = 0$ und ebenso für $c_1 = 1$ positiv unendlich und die Isothermen zeigen im Gebiete c_1 nahe 1 nicht den nötigen Anschluß an die Planckschen Isothermen. Oder φ_{11} ist negativ, dann folgt aus (18), daß die Kurvenschar keine Maxima und Minima zeigen kann, wie es für das Vorhandensein eines kritischen Punktes notwendig ist.

Sonach wird die Theorie der Lösungen durch die Jahnsche Näherung wenigstens in bezug auf die kritischen Erscheinungen keinen Schritt weiter geführt.

III. Die Isothermen der Ansätze (7), (9) ergeben demgegenüber zunächst widerspruchsfrei den kritischen Punkt. Für diesen gilt jetzt

$$\frac{r_0}{c_0} + \frac{r_1}{c_1} = 2\varphi_{11},$$

$$\frac{r_0}{c_0^3} - \frac{r_1}{c_1^3} = 0.$$

Hieraus folgen die kritischen Konzentrationen, die wir von jetzt ab durch einen Stern auszeichnen,

$$(21) \quad c_0^* = \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}}, \quad c_1^* = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}}$$

Nach (5) kann man diese Werte in Zusammenhang mit den Molekulargewichten bringen; es ergibt sich die Beziehung

$$\frac{c_0^*}{c_1^*} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_0}}$$

für deren Prüfung es zunächst allerdings noch an dem nötigen Beobachtungsmaterial fehlt. Die kritische Temperatur bestimmt sich aus

$$(22) \quad \varphi_{11}^* = \frac{1}{2} (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2.$$

Jede Isotherme zeigt für $\varphi_{11} > \varphi_{11}^*$ ein Maximum und ein Minimum. Für Werte von c_1 nahe 0 oder 1 gehen die Isothermen in die Plancksche Form über. Sie bilden demnach eine Kurvenschar etwa von der in Fig. 2 dargestellten Gestalt, die allen in Abschnitt 2 genannten Anforderungen entspricht.

Auf jeder Isotherme lassen sich zwei Punkte, A und B , so bestimmen, daß ihre zur c_1 -Achse parallele Verbindungsgerade mit den Isothermenbögen ACE einerseits und BDE andererseits an Inhalt gleiche Flächenstücke begrenzt. Gemäß (13), (14) stellt AB den Zustand der Lösung im Zweiphasengebiet dar. Der geometrische Ort der Punkte A, B ist die Sättigungskurve, die im kritischen Punkt ein Maximum hat.

Das von der Sättigungskurve umschlossene Gebiet hat, wenn von Übersättigungserscheinungen abgesehen wird, nur theoretische Bedeutung; im besonderen führen nach (12) die Isothermen überall da, wo in diesem Gebiet

$$\frac{df}{dc_1} > 0$$

ist, durch labile Zustände hindurch. Die Konzentrationen in den Punkten A, B stehen zueinander in einer Beziehung, die von Druck und Temperatur unabhängig ist und die wir die Sättigungsgleichung nennen wollen. Sie wird aus den Gleichungen (13), (14), (16), (17) gewonnen und kann nach gehöriger Umformung auf die Form gebracht werden

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & r_0 \left\{ (c_0' + c_0'') \log \frac{c_0'}{c_0''} - 2(c_0' - c_0'') \right\} \\ & + r_1 \left\{ (c_1' + c_1'') \log \frac{c_1'}{c_1''} - 2(c_1' - c_1'') \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

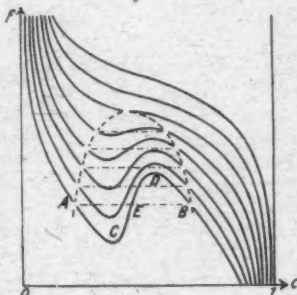


Fig. 2.

Solche zusammengehörigen Konzentrationen koexistenter Phasen sind von Rothmund in verschiedenen flüssigen Systemen beobachtet worden. Der Vergleich mit diesen Beobachtungen zeigt, daß (23) auch quantitativ mit der Erfahrung gut übereinstimmt. So ist z. B. für das Gemisch Schwefelkohlenstoff-Methylalkohol, wenn mit c_1 die Konzentration des Methylalkohols bezeichnet wird,

\bar{c}_1'	beobachtet	\bar{c}_1'' berechnet	$\frac{\bar{c}_1' \bar{c}_1''}{\bar{c}_0' \bar{c}_0''}$
0,549	0,017	0,016	0,021
0,492	0,028	0,027	0,028
0,458	0,036	0,037	0,032
0,416	0,045	0,050	0,034
0,360	0,065	0,072	0,039
0,195	0,195	0,192	0,059

wobei der Berechnung der Wert

$$\frac{r_1}{r_0} = 0,0567$$

zugrunde gelegt wurde.

Wir haben bisher mit den molaren Ansätzen gearbeitet. Die entsprechenden molekularen Beziehungen folgen aus (21), (22), (23), wenn darin r_1 und r_2 durch R ersetzt werden. Für den kritischen Punkt ergeben sich so die außerordentlich einfachen Bedingungen

$$c_0^* = \frac{1}{2}, \quad c_1^* = \frac{1}{2}, \quad \varphi_{11}^* = 2R.$$

Leider befinden sich die weiteren Ergebnisse nicht in der wünschenswerten quantitativen Übereinstimmung mit der Erfahrung. Die Sättigungsgleichung erhält hier nämlich die gleichfalls sehr einfache Form

$$c_1' + c_1'' = 1,$$

oder, wenn sie auf die von Rothmund beobachteten molaren Konzentrationen reduziert wird, die jetzt der Übersichtlichkeit halber wieder besonders gekennzeichnet werden,

$$\frac{\bar{c}_1' \bar{c}_1''}{\bar{c}_0' \bar{c}_0''} = \frac{\mu_1^2}{\mu_0^2} = \text{const.}$$

Wie die letzte Spalte der obigen Tabelle zeigt, ist der Quotient auf der linken Seite aber keineswegs konstant, sondern mit

der Konzentration in ziemlich hohem Grade veränderlich. Danach kommt den molekularen Ansätzen nur eine qualitative Bedeutung zu.

Ähnlich wie bei den Planckschen Isothermen lassen sich auch hier die beiden Ansätze miteinander vergleichen, die man erhält, wenn man einmal den einen und dann den anderen Stoff als Lösungsmittel ansieht. Unterscheidet man die Größen in beiden Fällen wieder durch herangefügten oberen Index, so wird entweder

$$f = f_{01} + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 + 2 c_1 \varphi_{11}^0,$$

$$f_{01} = r_0 - \varphi_0^0 - r_1 + \varphi_1^0,$$

oder

$$f = f_{10} + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 + 2 c_1 \varphi_{11}^1,$$

$$f_{10} = r_0 - \varphi_0^1 - r_1 + \varphi_1^1 - 2 \varphi_{11}^1.$$

Haben die aus beiden Ansätzen folgenden Isothermen gemeinsame Punkte — und das ist anzunehmen, wenn anders sich aus ihnen die kritischen Erscheinungen in gleicher Weise ergeben sollen —, so müssen die Beziehungen

$$\varphi_{11}^0 = \varphi_{11}^1 = \varphi_{11},$$

$$\varphi_0^0 + \varphi_1^1 - 2 \varphi_{11} = \varphi_0^1 + \varphi_1^0$$

erfüllt sein; es muß also vor allem der Koeffizient φ_{11} in genau der gleichen Weise vom Lösungsmittel wie vom gelösten Stoff abhängen.

4. Ein allgemeiner Satz über die Sättigungsgleichung.

Versucht man, wie wir es oben getan haben, die Plancksche Theorie der hochverdünnten Lösungen in absichtlicher Überschreitung ihres Geltungsbereichs auf die kritischen Lösungserscheinungen, die sich wesentlich nur in Gebieten höherer Konzentration abspielen, anzuwenden, so ergibt sich im allgemeinen nicht nur keine Übereinstimmung mehr mit der Erfahrung, sondern man wird auch, wie sich gezeigt hat, zu Widersprüchen der Theorie in sich geführt. Immerhin ergab sich z. B. schon der Krümmungswechsel der Isothermen an der richtigen Stelle und sehr wunderbarer Weise läßt sich auch die Sättigungsgleichung — wie man sich leicht überzeugt — aus jenen Ansätzen herleiten, die in sich völlig widerspruchsfrei ist und, wie wenigstens im Falle binärer Gemische

Solche zusammengehörigen Konzentrationen koexistenter Phasen sind von Rothmund in verschiedenen flüssigen Systemen beobachtet worden. Der Vergleich mit diesen Beobachtungen zeigt, daß (23) auch quantitativ mit der Erfahrung gut übereinstimmt. So ist z. B. für das Gemisch Schwefelkohlenstoff-Methylalkohol, wenn mit c_1 die Konzentration des Methylalkohols bezeichnet wird,

\bar{c}_1'	beobachtet	\bar{c}_1'' berechnet	$\frac{\bar{c}_1' \bar{c}_1''}{\bar{c}_0' \bar{c}_0''}$
0,549	0,017	0,016	0,021
0,492	0,028	0,027	0,028
0,458	0,036	0,037	0,032
0,416	0,045	0,050	0,034
0,360	0,065	0,072	0,039
0,195	0,195	0,192	0,059

wobei der Berechnung der Wert

$$\frac{r_1}{r_0} = 0,0567$$

zugrunde gelegt wurde.

Wir haben bisher mit den molaren Ansätzen gearbeitet. Die entsprechenden molekularen Beziehungen folgen aus (21), (22), (23), wenn darin r_1 und r_2 durch R ersetzt werden. Für den kritischen Punkt ergeben sich so die außerordentlich einfachen Bedingungen

$$c_0^* = \frac{1}{2}, \quad c_1^* = \frac{1}{2}, \quad \varphi_{11}^* = 2R.$$

Leider befinden sich die weiteren Ergebnisse nicht in der wünschenswerten quantitativen Übereinstimmung mit der Erfahrung. Die Sättigungsgleichung erhält hier nämlich die gleichfalls sehr einfache Form

$$c_1' + c_1'' = 1,$$

oder, wenn sie auf die von Rothmund beobachteten molaren Konzentrationen reduziert wird, die jetzt der Übersichtlichkeit halber wieder besonders gekennzeichnet werden,

$$\frac{\bar{c}_1' \bar{c}_1''}{\bar{c}_0' \bar{c}_0''} = \frac{\mu_1^2}{\mu_0^2} = \text{const.}$$

Wie die letzte Spalte der obigen Tabelle zeigt, ist der Quotient auf der linken Seite aber keineswegs konstant, sondern mit

der Konzentration in ziemlich hohem Grade veränderlich. Danach kommt den molekularen Ansätzen nur eine qualitative Bedeutung zu.

Ähnlich wie bei den Planckschen Isothermen lassen sich auch hier die beiden Ansätze miteinander vergleichen, die man erhält, wenn man einmal den einen und dann den anderen Stoff als Lösungsmittel ansieht. Unterscheidet man die Größen in beiden Fällen wieder durch herangefügten oberen Index, so wird entweder

$$\begin{aligned} f &= f_{01} + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 + 2 c_1 \varphi_{11}^0, \\ f_{01} &= r_0 - \varphi_0^0 - r_1 + \varphi_1^0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} f &= f_{10} + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 + 2 c_1 \varphi_{11}^1, \\ f_{10} &= r_0 - \varphi_0^1 - r_1 + \varphi_1^1 - 2 \varphi_{11}^1. \end{aligned}$$

Haben die aus beiden Ansätzen folgenden Isothermen gemeinsame Punkte — und das ist anzunehmen, wenn anders sich aus ihnen die kritischen Erscheinungen in gleicher Weise ergeben sollen —, so müssen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^0 &= \varphi_{11}^1 = \varphi_{11}, \\ \varphi_0^0 + \varphi_1^1 - 2 \varphi_{11} &= \varphi_0^1 + \varphi_1^0 \end{aligned}$$

erfüllt sein; es muß also vor allem der Koeffizient φ_{11} in genau der gleichen Weise vom Lösungsmittel wie vom gelösten Stoff abhängen.

4. Ein allgemeiner Satz über die Sättigungsgleichung.

Versucht man, wie wir es oben getan haben, die Plancksche Theorie der hochverdünnten Lösungen in absichtlicher Überschreitung ihres Geltungsbereichs auf die kritischen Lösungserscheinungen, die sich wesentlich nur in Gebieten höherer Konzentration abspielen, anzuwenden, so ergibt sich im allgemeinen nicht nur keine Übereinstimmung mehr mit der Erfahrung, sondern man wird auch, wie sich gezeigt hat, zu Widersprüchen der Theorie in sich geführt. Immerhin ergab sich z. B. schon der Krümmungswechsel der Isothermen an der richtigen Stelle und sehr wunderbarer Weise läßt sich auch die Sättigungsgleichung — wie man sich leicht überzeugt — aus jenen Ansätzen herleiten, die in sich völlig widerspruchsfrei ist und, wie wenigstens im Falle binärer Gemische

gezeigt wurde, in bemerkenswertem Grade den Beobachtungsergebnissen entspricht. Die Bedeutung der von uns an die Planckschen Ansätze herangesetzten Zusatzglieder beruht demnach im wesentlichen darin, daß sie die inneren Widersprüche der Theorie beseitigen, ohne doch — ganz im Gegensatz zu der Jahnschen Erweiterung — den schon brauchbaren Kern, die Sättigungsgleichung nämlich, zu verändern. Die durch diese Glieder veranlaßte Änderung ist demnach rein sekundärer Natur und die oben gezogenen durch die Erfahrung bestätigten Folgerungen sind im wesentlichen schon ein Bestandteil der ursprünglichen Planckschen Theorie. Wir zeigen kurz, auf welchen allgemeinen Zusammenhängen dies beruht.

Aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (10), (11) ergibt sich für irgend zwei Phasen, z. B. für die ersten beiden, die Gleichung

$$(24) \quad \varphi' - \varphi'' = \frac{1}{2} \sum (c_1' - c_1'') \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} + \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} \right),$$

worin die Summe über alle Bestandteile, auch über den α ten, zu erstrecken ist. Die Zustandsänderungen, auf die wir diese Gleichgewichtsbedingungen in der vorliegenden Untersuchung anwenden, sind nicht ganz allgemeiner Natur; sie gehen vielmehr stets kontinuierlich ohne chemische Umsetzungen vor sich. Handelt es sich etwa wie oben um ein binäres Gemisch, so wird dessen Zustand durch die nämliche Funktion Φ bestimmt, gleichgültig, ob es einerseits oder andererseits verdünnt oder beliebig konzentriert ist. Ebenso unterscheiden sich z. B. φ' und φ'' nur durch die Werte der Konzentrationen, dagegen sind die darin eingehenden Konstanten die gleichen, genau wie dies in der Van der Waalsschen Theorie der Zustandsgleichung einer einheitlichen Flüssigkeit der Fall ist, die in unveränderter Form für den von der Flüssigkeit ausgesandten Dampf Gültigkeit behält. Unter dieser beschränkten Annahme gilt der folgende Satz: Ist φ eine ganze Funktion ersten oder zweiten Grades der Konzentrationen, so wird (24) identisch erfüllt.

Zum Beweise werde φ zunächst als lineare Funktion der Konzentrationen angenommen; es sei etwa

$$\varphi = \sum \varphi_1 c_1,$$

worin die Koeffizienten φ beliebig von Druck und Temperatur abhängen können. Dann ist unter der obigen Voraussetzung der Kontinuität

$$\varphi' = \sum \varphi_1 c_1', \quad \varphi'' = \sum \varphi_1 c_1'',$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} = \varphi_1 \text{ usw.}, \quad \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} = \varphi_1 \text{ usw.},$$

also

$$\varphi' - \varphi'' = \sum \varphi_1 (c_1' - c_1''),$$

$$\frac{1}{2} \sum (c_1' - c_1'') \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} + \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} \right) = \sum \varphi_1 (c_1'^2 - c_1''^2),$$

was zu beweisen war.

Um auch für quadratische Funktionen von der Form

$$\varphi = \sum \varphi_{11} c_1^2 + 2 \varphi_{12} c_1 c_2 + \dots$$

den Nachweis zu führen, bringt man (24) passend auf die Form

$$\varphi' - \varphi'' = \frac{1}{2} \sum \left(c_1' \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} - c_1'' \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum \left(c_1' \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} - c_1'' \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} \right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung zerfällt in zwei Teile, von denen der eine sich nur auf die erste Phase, der andere sich nur auf die zweite Phase bezieht. Soll die Gleichung identisch erfüllt werden, so muß sich auch die rechte Seite in gleicher Weise anordnen lassen können. Abgesehen von dem Fall, daß φ linear von den Konzentrationen abhängt, ist diese Zerlegung aber nur dann möglich, wenn die zweite Summe identisch verschwindet, wenn also einzeln

$$\varphi' - \varphi'' = \frac{1}{2} \sum \left(c_1' \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} - c_1'' \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} \right),$$

$$0 = \sum \left(c_1' \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} - c_1'' \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} \right).$$

Der oben angegebene quadratische Ausdruck erfüllt nun in der Tat diese beiden Bedingungen. Für die erste folgt dies aus der Eigenschaft von φ als homogene Funktion zweiten Grades; für die zweite sieht man es, wenn man die Glieder mit einem bestimmten der Koeffizienten φ_{11} , φ_{12} usw. ins Auge faßt.

Man erkennt weiter sofort, daß ganze Funktionen der Konzentrationen von höherem als dem zweiten Grade die bewiesene Eigenschaft nicht mehr haben; denn die erste der

beiden simultanen Gleichungen wird nur durch quadratische Funktionen erfüllt. Demnach führen alle Funktionen φ_1 , die sich um ganze Funktionen ersten oder zweiten Grades der Konzentrationen unterscheiden, aber auch nur diese zur nämlichen Gleichung (24).

Nach dem bewiesenen Satze wird (24) durch die zweite und die dritte Summe, in dem von uns den Betrachtungen zugrunde gelegten Ausdruck (4), (9), (16)

$$\varphi = - \sum r_0 c_0 \log c_0 + \sum \varphi_0 c_0 + \sum (\varphi_{11} c_1^2 + 2 \varphi_{12} c_1 c_2 + \dots)$$

identisch befriedigt. Es kann also φ beim Einsetzen in (24) durch den einfacheren, schon im Planckschen Ansatz für hochverdünnte Lösungen enthaltenen Ausdruck

$$- \sum r_0 c_0 \log c_0$$

ersetzt werden. Hieraus geht schon hervor, daß die aus (24) herzuleitende Gleichung in unserem Falle Druck und Temperatur nicht enthält, sich also eine Beziehung allein zwischen den Konzentrationen koexistenter Phasen ergibt. Vereinigt man nach dem Einsetzen alle sich auf den gleichen Bestandteil beziehenden Glieder, so erhält man die Sättigungsgleichung (28) in der allgemeinen Form

$$\sum r_0 \{ (c_0' + c_0'') \log \frac{c_0'}{c_0''} - 2 (c_0' - c_0'') \} = 0.$$

Entsprechende Beziehungen gelten natürlich auch für jede andere Kombination von je zwei Phasen.

Die Sättigungsgleichung ist sonach allein eine Folge der logarithmischen Glieder in den Planckschen Reihenentwicklungen, die sich bekanntlich aus dem Vergleich der Gesetze der Lösungen mit den Gesetzen des idealen Gaszustandes ergeben. Damit treten die Erscheinungen der Sättigung und der kritischen Löslichkeit in direkte Beziehung zu den Gasgesetzen. In der Tat würde die Sättigungsgleichung genau so für den gasförmigen Zustand gelten müssen, wenn ein Gasgemisch in zwei Phasen vorkommen könnte. Natürlich würden sich dabei auch wieder die gleichen Widersprüche wie oben bei Bestimmung des kritischen Punktes aus den Planckschen Ansätzen ergeben müssen, die ja erst durch das Anfügen der quadratischen Glieder, die die Gasgleichung¹⁾ nicht enthält,

1) Planck, a. a. O. Gleichung 199a.

aufgehoben werden. Die gesamte Theorie bleibt widerspruchsfrei, weil im Bereiche der einfachen nur lineare Glieder enthaltenden Ansätze, bei den Gasen nämlich, nicht Phasen verschiedener Zusammensetzung gebildet werden, und weil da, wo solche Phasen in flüssigen oder festen Systemen auftreten, eben die allgemeinere die quadratischen Glieder mit enthaltende Fundamentalbeziehung gilt.

Bemerkt sei noch, daß in den vorliegenden Betrachtungen unseres Wissens zum ersten Male das auf das Lösungsmittel bezogene Glied $\log c_0$ voll zur Geltung kommt. Bei den Vorgängen in verdünnten Lösungen wird c_0 im allgemeinen gleich 1 gesetzt, so daß $\log c_0$ verschwindet.

Die von uns vorgenommene Erweiterung der Planckschen Theorie erweist sich nach der obigen Darlegung in dem betrachteten speziellen Beispiel als erfolgreich. Weitergehende Untersuchungen müssen zeigen, ob sich noch andere zutreffende Folgerungen daraus ziehen lassen. Vor allem muß dadurch entschieden werden, ob die in der obigen Anwendung auch quantitativ befriedigenden molaren Ansätze in der Tat vor den molekularen den Vorzug verdienen. Es würde das den bisherigen Anschauungen, wonach die molekularen Ansätze im Wesen der Sache begründet sind, entgegen sein. Sollte diese Entscheidung nicht zugunsten der molaren Gleichungen ausfallen, so müßten im genauen Verfolg des Planckschen Gedankens die Reihenglieder dritter und höherer Ordnung herangezogen werden, um den quantitativen Anschluß an die Erfahrung zu erzielen. Dadurch würde dann allerdings die Sättigungsgleichung nicht unerhebliche Änderungen erfahren.

Wenn auch die weitere Auswertung der Planckschen Reihenentwicklungen immer näheren Aufschluß in der Theorie der Lösungen bringen wird, so ist auf dem Wege doch wohl kein endgültiger Abschluß der Theorie zu erwarten, wenn man sich nicht in endlose Rechnungen verlieren will. Derartige Untersuchungen, die sich auf Reihenentwicklungen gründen, werden wohl stets mehr oder weniger unbewußt in der Hoffnung unternommen, allmählich nicht nur zu immer mehr genäherten, sondern zu den genauen Ansätzen durchdringen zu können. Das bedeutet die Erwartung, daß die

Reihen nach einer nicht zu großen Zahl von Gliedern abbrechen, also endlich sind, oder daß man nach wenigen Gliedern schon sichere Anhaltspunkte gewinnt, wie sich die entwickelte Funktion in Wirklichkeit aufbaut. Von diesem Standpunkt aus würde sich empfehlen, zunächst schon etwa den Ausdruck

$$\varphi = - \sum r_i c_i \log c_i + \sum \varphi_i c_i + \sum \varphi_{i\mu} c_i c_\mu \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, \alpha)$$

nicht nur als genäherten, sondern als genauen Wert des Potentials φ zu betrachten und alle irgend möglichen Folgerungen daraus zu ziehen. Erweist sich danach diese Annahme als nicht zutreffend, so würde neben der Untersuchung der Reihenglieder höherer Ordnung der Versuch gemacht werden können, mit einer geschlossenen Funktion, die durch den hingeschriebenen Ausdruck in anderer Weise approximiert wird, eine passende Erweiterung der Theorie zu finden. Am schnellsten und sichersten dürften solche rein formalen Versuche allerdings fortschreiten, wenn sie auf eingehende kinetische Vorstellungen gestützt werden könnten.

Neukölln, Juli 1919.

(Eingegangen 26. Juli 1919.)

3. Versuch einer physikalischen Lösung des Problems der sichtbaren Größendänderung von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont;

von H. Dember und M. Utbe.

(Abdruck aus den Berichten der Mathemat.-Phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 69, 14. Nov. 1917.)

Siebenter Bericht über die Ergebnisse der auf Teneriffa ausgeführten Arbeiten.

§ 1. Aufgabe.

Sonne und Mond besitzen im Horizont einen kleineren scheinbaren Durchmesser als im Zenit. Dies ist eine Folge davon, daß am Horizont der Abstand der Gestirne vom Beobachter größer ist als im Zenit. Am erdennahen Mond lassen sich diese Differenzen mikrometrisch feststellen, und man erhält z. B. für einen Durchmesser von $31'20''$ im Horizont einen solchen von $31'52''$ für 90° Höhe. Im gleichen Sinne wie die Verschiedenheit der Entfernung wirkt die atmosphärische Strahlenbrechung, die am Horizont eine Verkleinerung des vertikalen Durchmessers hervorruft. Aus diesen Gründen müßten die Gestirne am Horizont kleiner aussehen als im Zenit. Der tägliche Augenschein lehrt uns das Gegenteil: Wir schätzen die Gestirne in Horizontnähe mehr als doppelt so groß als in Zenitnähe.

Die älteren Theorien (Einfluß der Luftperspektive, Vergleichstheorien) sehen diesen Widerspruch als Wirkung einer Urteilstäuschung an, welche durch die unbewußte Verwendung von Urteilsmitteln hervorgerufen wird, die für diesen Fall untauglich sind, aber der sonstigen Erfahrung nach zu richtigen Schlüssen führen. In neuerer Zeit wird die Ursache oft einer optischen Täuschung zugeschrieben (Blickrichtungstheorie), bei welcher zwischen den geometrisch-physikalischen Eigenschaften des Objekts und der subjektiven optischen Wahrnehmung des Beobachters eine Übereinstimmung nicht besteht.

Die genau gleichen Anschauungen und Überlegungen, welche im einzelnen zur Erklärung der sichtbaren Größenveränderung der Gestirne dienen, sind auch für die Erklärung der Form des Himmelsgewölbes herangezogen worden. In dem vorangehenden 6. Bericht¹⁾ haben wir gezeigt, daß der sichtbaren Form des Himmelsgewölbes berechen- und meßbare physikalische Ursachen zugrunde liegen. Danach wird die Gestalt des Himmelsgewölbes bedingt durch die nach verschiedenen Richtungen von der Himmelshelligkeit abhängige verschiedene Sichtweite, welche bewirkt, daß wir am Tage im Abstände der Sichtweite eine unterschiedslose Grenze sehen, die von den im Sinne der Rayleighschen Theorie leuchtenden Molekeln der Luft gebildet wird.

Im folgenden haben wir den Versuch gemacht, experimentell und rechnerisch zu untersuchen, wieweit ein Zusammenhang zwischen diesem sichtbaren reellen Himmelsgewölbe und der sichtbaren Größenvariation der Gestirne besteht. Dabei hat uns der Gedanke geleitet, diejenige Stelle als Ort des Gestirns anzusehen, wo der vom Gestirn nach dem Auge konvergierende Lichtkegel das Himmelsgewölbe durchdringt und dann besonders zu untersuchen, ob zwischen den wirklichen Größen dieser Durchdringungstellen — die infolge der abgeflachten Form des Gewölbes sich bei verschiedenen Gestirnhöhen voneinander der Größe und Lage nach unterscheiden — und der sichtbaren Größe der Gestirne ein fester numerischer Zusammenhang besteht.

§ 2. Versuch zur Prüfung der Gauss'schen Blickrichtungstheorie.

Eine zahlenmäßige Prüfung derjenigen Theorien durchzuführen, die auf Urteilstäuschung und unbewußten Schlüssen, also auf rein psychologischen Vorgängen beruhen, waren wir nicht imstande. Dagegen ließ sich eine Entscheidung über das Gelingen eines Versuches bringen, von dem widersprechende Ergebnisse vorliegen und der von mehreren Forschern dazu angestellt worden ist, zu prüfen, wieweit bei der Größenvariation der Gestirne die Blickrichtung eine Rolle spielt, also eine bestimmte physiologische Eigenschaft unseres Sehapparates in

1) H. Dember und M. Uibr, Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes. Ber. d. math.-physikal. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. S. 391—411. 1917.

Frage kommt. Der Vorschlag, einen solchen Versuch auszuführen, rührt von Gauss her: Hängt die scheinbare Größe der Sonne und des Mondes von der Blickrichtung ab, so muß das Spiegelbild des im Zenit stehenden Gestirns, in der horizontalen Richtung gesehen, groß erscheinen, und andererseits das vom Horizont aus in die Vertikale geworfene Bild klein. Helmholtz hat diesen Versuch ausgeführt¹⁾, indem er den hochstehenden Mond in die horizontale Richtung reflektierte. Der reflektierte Mond erschien ihm nicht entschieden größer als der direkt gesehene. Filehne und Zoth²⁾ dagegen beschreiben den Versuch mit konträrem Ergebnis. Sowohl Helmholtz als auch die beiden letzteren Forscher benutzten planparallele Glasplatten zur Spiegelung.

Wir haben das Experiment mit einigen Abänderungen unter besonderer Berücksichtigung des Punktes wiederholt, der dem Helmholtzschen Versuch als Fehler vorgeworfen worden

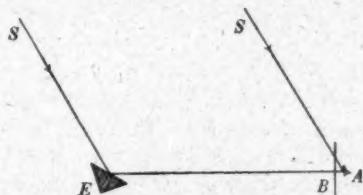


Fig. 1. Versuchsanordnung.

ist, nämlich daß in seiner Anordnung der Spiegel selbst nicht unsichtbar gewesen sei. Außerdem haben wir die planparallele Platte durch eine einzige spiegelnde Oberfläche ersetzt, weil planparallele Glasplatten sowohl an der Vorder- wie auch Hinterseite reflektieren und so zwei Bilder geben, die bei schräger Incidenz der Lichtstrahlen nicht ganz zur Deckung kommen und bei genügender Lichtintensität leicht eine Vergrößerung vortäuschen können. Das Licht des Gestirns *S* (vgl. obenstehende Versuchsanordnung) fiel in unserer Anordnung auf die Hypotenuse eines sehr gut geschliffenen Glasprismas *E* und von dort durch ein Blendglas *B* in das Auge *A*.

1) H. v. Helmholtz, Physiologische Optik. 2. Aufl., S. 776. 1896.

2) Vgl. Pernter-Exner, Meteorologische Optik, wo auch, wie bei Helmholtz, die ältere Literatur angegeben ist.

Das Blendglas bestand in einer exponierten, entwickelten und fixierten photographischen Platte, welche die Sonne als silbernes Scheibchen durchscheinen ließ, aber so dicht war, daß von der spiegelnden Oberfläche des Prismas nichts erkannt werden konnte. Das Auge hat auf solche Weise keinen Anhalt, die Akkommodation beim Wechsel der Objekte (direkt gesehene Sonne oder ihr Spiegelbild) zu ändern. Das Ergebnis unserer Versuche war das gleiche wie es Helmholtz erhalten hat: Ob das Gestirn direkt oder im Spiegelbild betrachtet wurde, es behielt immer die gleiche scheinbare Größe. Die Versuche kamen an der Sonne und am Mond mit gleichem Resultat zur Ausführung.

Der Blickrichtungstheorie kommt hiernach für die Erklärung der Vergrößerung der Gestirne ebensowenig eine Bedeutung zu, wie für die Erklärung der Form des Himmelsgewölbes. Eine auf solche Art zustande kommende optische Täuschung liegt nicht vor.

§ 3. Meßmethode.

Um die Größenveränderung der Gestirne in verschiedenen Höhen über dem Horizont zu verfolgen, bedienten wir uns des folgenden, im Prinzip einfachen und schon von Reimann verwendeten Verfahrens. Eine weiße kreisrunde und durchscheinende Leinwandscheibe wurde in solcher Entfernung vom Beobachter aufgestellt, daß sie ihm die gleiche Größe zu haben schien wie das durch ein Blendglas betrachtete Gestirn. Das Blendglas ist stets so dicht gewesen, daß nur das Gestirn und nichts von der Umgebung zu erkennen war. Dabei ist vor allem darauf geachtet worden, daß kein Messen an Stelle des Schätzens ausgeführt werden konnte. Dies erreichten wir so, daß der Azimutabstand des niedrig stehenden Gestirns — nur hier liegt die Gefahr vor — ein genügend großer von der Scheibe aus war, und zwar immer größer als 30° . Die Höhe der Scheibe, die in einem dunklen Rahmen an einer der Länge nach verstellbaren Stange saß, war die Augenhöhe, und die Scheibe kam meist so zur Aufstellung, daß sie der Meereshorizont schnitt. Für verschieden große Gestirnhöhen muß der Beobachter eine jedesmal andere Distanz von der Scheibe aufsuchen, damit diese ihm gleich groß erscheint wie das Ge-

stirn. Das Aufsuchen geschah in der Weise, daß der Beobachter aus einer Entfernung, bei der die Leinwandscheibe mit Sicherheit kleiner geschätzt wurde als das Gestirn, an die Scheibe langsam heranging, den Ort der Gleichheit markierte und dann so weit sich näherte, bis die Scheibe mit Sicherheit größer erschien. Rückwärtsgehend markierte er dann wieder den Punkt der Gleichheit. Das Mittel aus beiden Markierungen nahmen wir als richtiges Mittel an und bestimmten den Abstand von der Vergleichsscheibe mit dem Bandmaß. Sieben Monate lang fortgesetzte, fast tägliche Übung verschaffte die angestrebte Sicherheit in der Ausführung der Schätzungen.

Diese Beobachtungsmethode setzt voraus, daß für alle in Frage kommenden Abstände des Beobachters von der Vergleichsscheibe die scheinbare lineare Größe der Scheibe dem Abstände umgekehrt proportional ist oder ein anderer gesetzmäßiger Zusammenhang besteht. Es läßt sich durch Verwendung verschieden großer Scheiben bei gleicher Höhe des Gestirns leicht zeigen, daß diese Voraussetzungen für kleine Abstände nicht gelten¹⁾, und wir haben aus diesem Grunde die Scheibengrößen so gewählt, daß Entfernungen unter 15–20 m nur ausnahmsweise benutzt zu werden brauchten. Die Durchmesser der am meisten zur Verwendung gekommenen Scheiben waren $2r_1 = 40,0$ cm und $2r_2 = 29,8$ cm. Daß für größere Entfernungen die erste Voraussetzung erfüllt ist, zeigen die folgenden Beobachtungsreihen. Aus ihnen ist zu erkennen, daß sich die mit beiden Scheiben für dieselbe Gestirnhöhe gefundenen Entfernungen L_D (Beobachter: D) und L_U (Beobachter: U) wie die Durchmesser der Scheiben verhalten, daß also die Bedingung für die Verwendbarkeit der Methode

$$L_D : L_U = \text{konst.} = 2r_1 : 2r_2 = 40,0 : 29,8 = 1,342$$

mit hinreichender Annäherung Genüge getan wird.

In den Tabellen bedeutet ζ_z die Zenitdistanz des Gestirns und daher $\frac{\pi}{2} - \zeta_z = \varphi_z$ seine Höhe über dem Horizont.

1) Aus allen folgenden Ergebnissen ist der Schluß zu ziehen, daß auch für sehr große Entfernungen (~ 50 km) der Gesichtswinkel dem Auge nicht mehr das exakte Maß der scheinbaren Größe bildet. Ob darüber direkte Messungen vorliegen, ist uns nicht bekannt.

Tabelle 1.

Gestirn	$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	$L_D : L_U$	Bemerkungen
Sonne	3,2° vorm.	31,95 m			2. Juni 1917
	3,8		23,60 m	1,35	
	7,8	34,10			
	7,9		25,80	1,32	
	13,2		29,50		Klar, nur Horizont [diesig]
	13,8	40,85		1,38	
	26,8	46,40			
	26,8		33,50	1,38	
	37,3	48,25			In der Gäßmarmulde [ganz feiner Dunst]
	38,4		36,45	1,32	
	61,5	56,05			
	62,5		41,10	1,36	
	73,6	61,00			Haidingers Büschel [deutlich]
	75,6		48,20	1,26	
	83,7	61,00	48,50	1,26	
	53,9° nachm.	46,90			
	52,6		33,70	1,39	
	41,7		33,40		
	41,0	48,50		1,45	
	32,0	45,50	33,40	1,36	
	17,1	41,40	30,10	1,37	
			Mittel		
			= 1,350		

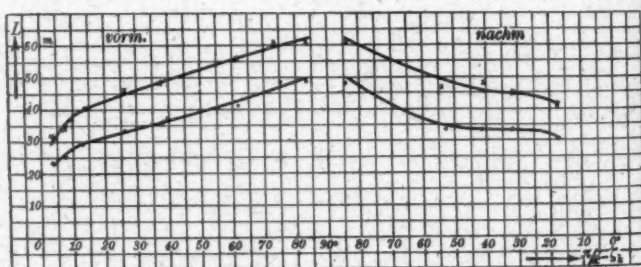


Fig. 2. Kurve 1.

Tabelle 2.

Gestirn	$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	$L_D : L_U$	Bemerkungen
Sonne	5,6° vorm.		24,15 m		4. Juni 1917
	6,0	33,55 m		1,39	Horizont diesig
	16,2	41,50	29,70	1,40	
	28,3	46,00			
	29,2		34,00	1,35	Bis auf Horizont:
	40,0		38,70		[klar]
	40,3	48,40		1,25	
	63,1	57,75			
	64,1		44,80	1,29	
	76,5	60,30			
	76,8		46,90	1,29	
	83,9	62,50	44,60	1,40	Schwach dunstig in
	62,6° nachm.		36,60		[der Gülmarmulde]
	62,0	49,20		1,34	
	48,2	48,70	35,60	1,36	
	35,2	44,60	33,40	1,33	
	17,8	37,15	27,70	1,34	Horizont wird klar
				Mittel = 1,340	

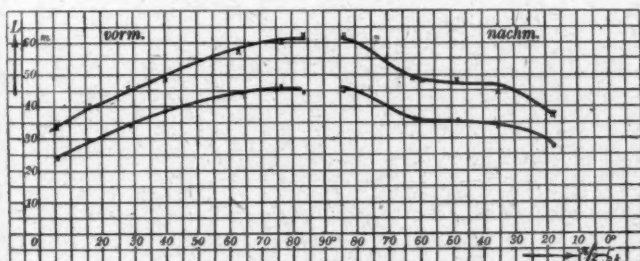


Fig. 3. Kurve 2.

Tabelle 2a.

Gestirn	$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	$L_D : L_U$	Bemerkungen
Vollmond	4,6°		26,10 m		4. Juni—5. Juni 1917
	5,1	34,75 m		1,33	Klare Nacht
	11,0		30,20		
	12,0	40,70		1,35	
	26,0	43,55	37,20	1,18	
	33,0	47,75	39,20	1,22	
	37,5	53,40	40,90	1,31	
	29,5	45,00	33,90	1,33	
	16,5	41,55	31,20	1,34	
				Mittel = 1,295	

Für geringere Entfernungen als 15 m haben uns besondere Untersuchungen gezeigt, daß sich $L_D : L_U$ dem Werte

$$\left(\frac{2r_1}{2r_2}\right)^2 = 1,80$$

nähert, woraus folgt, daß das Auge dann nicht mehr Durchmesser, sondern Flächen schätzt. Der Übergang von der ersten zur zweiten Potenz von $\left(\frac{2r_1}{2r_2}\right)$ geschieht langsam und ist stark von der individuellen Beschaffenheit des Auges und der Disposition des Beobachters abhängig. Beträgt schließlich der Abstand des Beobachters von der Vergleichsscheibe nur etwa 5 m, so ändert sich die scheinbare Größe bei weiterer Annäherung nicht mehr, d. h. die Methode versagt.

Eine große Anzahl von Beobachtungen, die in der Weise angestellt waren, daß derselbe Beobachter erst mit der einen Scheibe den Abstand L_D , dann mit der andern den Abstand L_U aufsuchte, mußten verworfen werden, da die Messungen keine Kohärenz zeigten und eine große Unsicherheit beim Schätzen vorhanden war, die nicht überwunden werden konnte. Jeder Beobachter arbeitete schließlich monatelang nur mit ein und derselben Scheibe ganz bestimmter Größe. Die Übung wurde mit dieser so weit getrieben, daß bei gleicher Sonnenhöhe, aber wechselnder Aufstellung im Gelände — so daß die vielleicht mögliche Erkennung der Entfernungen an irgendwelchen Merkmalen vereitelt war — die Abstände L bei Wiederholungen auf 30—50 cm gleich geschätzt wurden, was einem relativen Fehler einer Schätzung von 1—2% entspricht.

Um die Sicherheit und Gleichartigkeit der Schätzungen weiter zu erhöhen, kamen sie immer so zur Ausführung, daß das Auge durch das Blendglas hindurch fest auf das Gestirn gerichtet blieb und nur zum schätzenden Vergleich bei langsamen Vor- und Rückwärtsschreiten von Zeit zu Zeit ein kurzer Blick auf die Vergleichsscheibe geworfen wurde.

§ 4. Beobachtungsergebnisse an Sonne und Mond.

In den Tabellen 1—13 und den Kurven 1—13, sowie der Tafel der Mondmessungen Fig. 16 sind die Meßresultate von 14 günstigen Tagen und 6 Nächten niedergelegt, die in den letzten Monaten erhalten worden sind. $\left(\frac{\pi}{2} - \zeta_k\right) = \varphi_k$

bedeutet die mit einem Busch-Jensenschen Pendelquadranten gemessene Höhe des Sonnen- bzw. Mondzentrums, L_D und L_U die jeweiligen von beiden Beobachtern für die verschiedenen Höhen gefundenen Abstände von den Vergleichsscheiben.

Tabelle 3.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
4,4°	—	29,70 m	7. Juli 1917
5,6	38,00 m	30,70	Sehr klar
10,0	43,90	33,60	2° hohe Wolkenbank am SO-Horizont
15,6	49,10	35,50	
29,1	52,40	36,00	
37,5	54,70	39,00	
59,5	59,15	40,70	
73,0	60,40	41,60	
84,1	64,60	44,70	

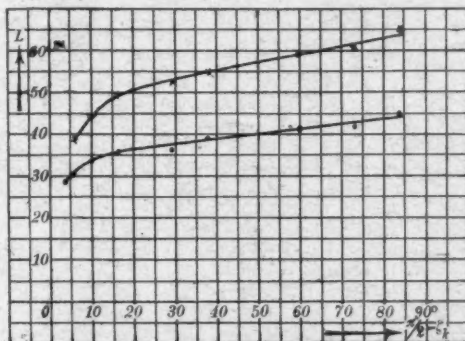


Fig. 4. Kurve 3.

Tabelle 4.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
3,7°	—	25,40 m	8. Juli 1917
6,8	37,60 m	30,00	Sonne geht stark elliptisch
10,6	43,30	33,70	auf
17,7	45,15	33,80	Horizont diesig
29,4	47,80	35,00	Himmel fleckig.
38,3	54,00	36,40	
52,5	59,80	37,20	
65,6	59,10	38,20	
78,3	59,00	38,40	
84,0	60,10	38,00	

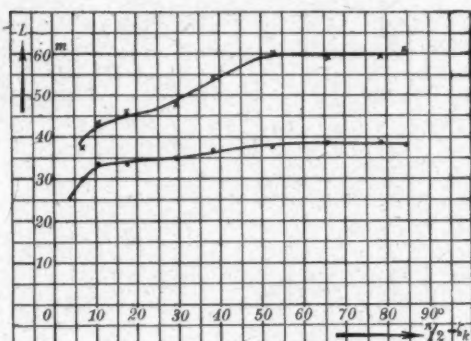


Fig. 5. Kurve 4.

Tabelle 5.

$\frac{\pi}{2} - \gamma_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
4,2°	39,70 m	27,25 m	9. Juli 1917 Klar Mond tagüber gut sichtbar
7,2	41,00	30,60	
11,2	42,10	30,50	
17,8	46,80	32,50	
28,2	48,60	33,20	
41,7	51,20	34,80	
51,4	52,90	36,40	
66,0	58,40	39,60	
79,0	59,40	44,90	
83,9	59,20	44,70	

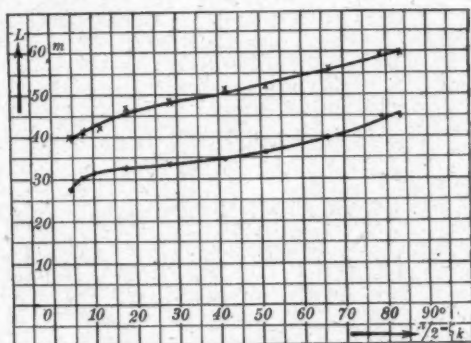


Fig. 6. Kurve 5.

Tabelle 6.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
4,4°	39,50 m	27,60 m	10. Juli 1917
5,8	40,15	28,80	
10,5	42,60	30,50	
18,5	43,10	32,90	Tagsüber immer wachsende Sichtigkeit
25,8	45,90	33,20	
37,7	46,60	35,00	
53,4	51,00	36,00	
65,0	51,35	36,00	
83,7	53,60	43,70	

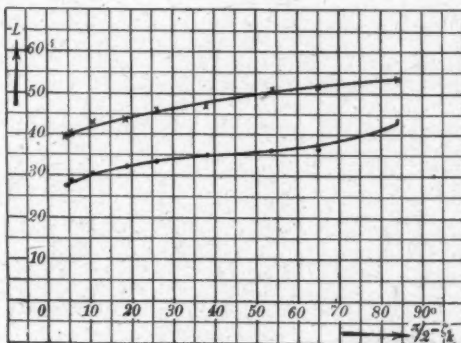


Fig. 7. Kurve 6.

Tabelle 7.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	$L_U \times 1,34$	Mittelaus L_D und $L_U \times 1,34$	$\frac{1}{\text{Mittel}}$ $\times 10^3$	Bemerkungen
3,8°	29,60 m	24,70 m	33,1 m	31,4 m	3,19	11. Juli 1917
7,2	36,60	27,80	36,5	36,5	2,74	Südwetter
11,2	39,60	30,65	41,3	40,4	2,47	Sonne erscheint
20,3	42,20	30,80	41,4	41,8	2,39	weiß beim Auf-
29,5	45,20	34,45	46,1	45,6	2,19	gehen
45,0	47,60	35,20	47,3	47,4	2,11	Feine hohe Zirren
63,3	48,35	36,65	49,3	48,8	2,05	
76,6	51,15	39,90	53,5	52,3	1,91	
83,7	52,25	40,80	54,8	53,5	1,87	

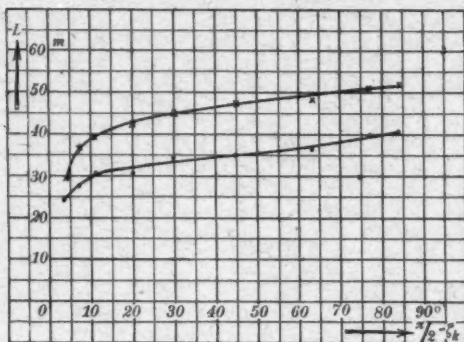


Fig. 8. Kurve 7.

Tabelle 8.

$\frac{\pi}{2} - \alpha_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
2,3°	27,25 m	18,60 m	12. Juli 1917
4,2	35,50	23,80	Südewetter
8,0	36,80	—	Feine hohe Zirren
9,2	—	25,30	
13,4	38,00	30,80	
22,4	44,60	31,60	
31,4	44,80	33,40	
52,2	46,80	36,40	
68,5	48,50	36,70	Dicht über dem Meer
77,5	51,65	37,75	bildet sich eine Wolken-
88,6	52,15	40,90	schicht
89,8°	42,80 m	31,00 m	13. Juli 1917
51,8	45,10	33,10	Himmel weißlich. Fernsicht
76,7	47,80	35,90	verschleiert. Hohe feine
83,5	46,70	35,20	Zirren

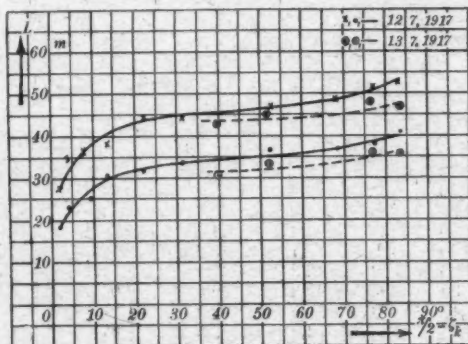


Fig. 9. Kurve 8.

Tabelle 9.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
2,5°	22,50 m	—	16. Juli 1917
4,7	—	21,70 m	Sonne geht elliptisch auf.
6,4	33,80	22,20	Himmel weißlich. Untere
11,6	36,80	30,00	Schichten aufklärend
21,0	39,30	32,00	
37,0	45,90	33,00	
50,9	46,40	34,60	
63,8	48,50	35,90	
77,0	51,60	36,90	
82,9	51,60	39,60	Aufklärend

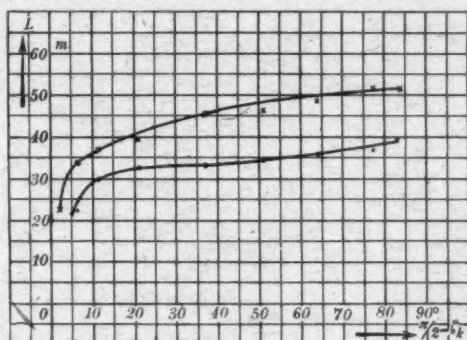


Fig. 10. Kurve 9.

Tabelle 10.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	$L_U \times 1,34$	Mittel aus L_D und $L_U \times 1,34$	1 Mittel $\times 10^3$	Bemerkungen
1,6°	18,40 m	—	—	18,4 m	7,47	17. Juli 1917
2,4	—	15,60 m	20,9 m	20,9	4,79	Größere Sichtweite
3,5	23,25	—	—	23,2	4,30	als tags vorher
3,9	—	20,80	27,9	27,9	3,59	Spitzen von Gran
8,0	34,30	26,30	35,2	34,8	2,87	Canaria (etwa
12,0	39,50	28,50	38,3	38,9	2,57	100 km Entfernung)
21,0	45,05	31,10	41,8	43,4	2,31	sichtbar
36,0	45,35	34,10	45,9	45,6	2,19	Außer Wolkenbank
57,2	48,50	35,85	48,0	48,2	2,07	von 1° Höhe
71,2	50,40	36,95	49,5	49,9	2,00	wolkenfrei
80,3	50,70	39,20	52,7	51,7	1,94	
82,7	52,30	40,30	54,0	53,1	1,88	

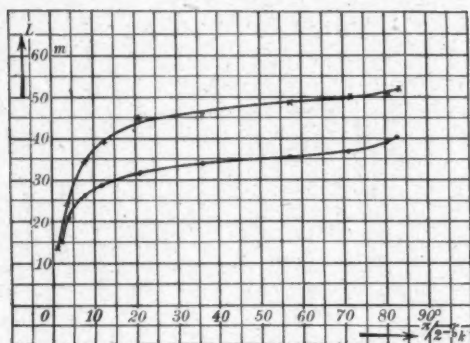


Fig. 11. Kurve 10.

Tabelle 11.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
1,9°	18,75 m	—	18. Juli 1917 Sehr klar Farbe des Himmels gesättigt
2,7	—	17,50 m	
3,4	—	18,10	
3,8	22,60	—	
7,6	32,70	23,60	
14,7	37,00	29,80	
21,3	40,70	29,40	
29,1	43,80	30,90	
39,5	46,80	33,80	
56,2	47,80	34,30	
71,0	49,30	35,10	
81,0	51,90	40,50	
82,6	53,50	36,50	

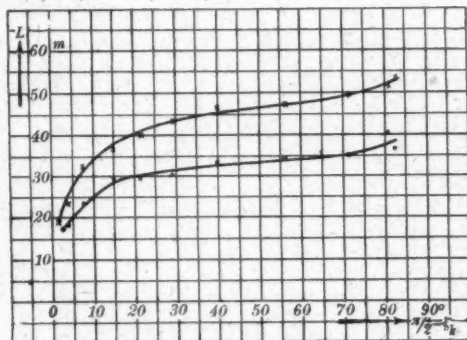


Fig. 12. Kurve 11.

Tabelle 12.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
1,0° vorm.	12,60 m	—	21. Juli 1917
1,9	—	14,50 m	Ort: Izaña, 2300 m ü. d. M.
4,0	35,55	—	$\bar{b}_p = 605 \text{ mm Hg}$
5,0	—	25,70	Sonne geht oval auf, daher
7,6	39,00	26,40	sind die frühen Werte
20,1	43,80	33,90	unsicher
36,5	46,60	34,20	Pik klar sichtbar. Gran
52,0	49,65	36,60	Canaria nicht sichtbar
64,6	52,80	38,20	Die unteren Schichten sind
77,9	53,70	36,60	deshalb dunstig anzunehmen
81,8	53,80	36,80	
72,3° nachm.	50,40	34,60	Tagesüber wachsende
56,4	43,40	32,20	Sichtigkeit
39,6	41,20	32,30	
23,3	38,70	31,30	
13,6	37,60	28,60	
5,6	36,65	27,10	
2,6	32,60	—	
2,0	30,00	—	
1,75	26,60	—	Sonne oval beim Untergang,
1,4	17,50	—	daher auch diese späten
0,5	10,40	—	Werte unsicher

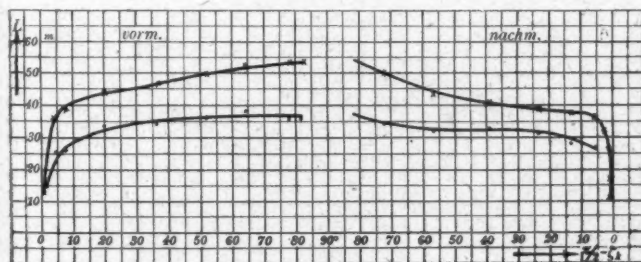


Fig. 13. Kurve 12.

Tabelle 13.

$\frac{\pi}{2} - \zeta$	L_D	L_U	Bemerkungen
2,1° vorm.	11,30 m	—	22. Juli 1917
3,0	20,30	—	Ort: Izaña ¹⁾
5,7	—	23,70 m	
6,4	38,20	30,00	Horizont im SO dunstig
17,7	43,30	32,20	N-Quadrant sichtbar
28,0	47,90	34,80	Blau des Himmels gesättigt
38,6	49,60	35,80	
50,5	49,90	34,10	
63,4	49,70	36,10	Vereinzelte Kumulibildung
76,1	50,00	33,00	über dem Pik
81,8	49,20	34,00	
71,0° nachm.	—	32,70	
55,0	—	32,90	Haidingers Büschel bei ge-
43,2	—	32,30	sättigtem Blau deutlich
27,1	—	30,60	
16,4	—	30,80	
7,0	—	28,65	
6,0	—	26,70	

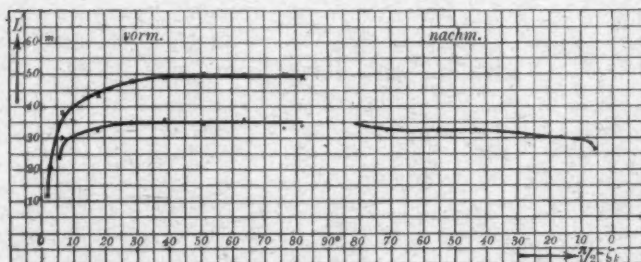


Fig. 14. Kurve 13.

§ 5. Durchdringungstheorie und ihre Prüfung an den Beobachtungen.

Wir wollen annehmen, daß die wahrgenommene Größenänderung eine physikalische Ursache besitzt, daß also *dem subjektiv als größer aufgefaßten Gestirn auch etwas objektiv Größeres zugrunde liegt*. Der vom Gestirn nach dem Auge konvergierende lichterfüllte Strahlenkegel schneidet aus dem lufteerfüllten

1) Dem Direktor des Izaña-Observatoriums Sr. D. Francisco del Junco haben wir für die Gastfreundschaft zu danken, die es uns ermöglicht hat, diese Beobachtungen auszuführen.

wo ψ durch den für das betreffende Gewölbe (Kalotte) in Betracht kommenden Halbwertwinkel gegeben ist. Das aus dieser Gleichung für ein bestimmtes φ_k berechnete ψ_k in die vorangehende Beziehung eingesetzt, ergibt k und k' .

Eine bestimmte Anzahl Grade $\varphi_{k(1)} - \varphi_{k(2)}$ schneide $k'(1) - k'(2) = \Delta k'$ Teile ab. Im gleichen Längenmaß wie die $\Delta k'$ lassen sich die Projektionen $\Delta k'_p$ dieser Längen auf eine Ebene, die zur Blickrichtung senkrecht steht, ausdrücken. Da der projizierende Winkel $QNP = R - (\varphi_k + \psi_k)$ ist, so gilt

$$NP = NQ \cdot \sin(\varphi_k + \psi_k),$$

$$\Delta k'_p = \Delta k' \cdot \sin(\varphi_k + \psi_k).$$

Für zwei verschiedene Höhen über dem Horizont erhalten sich diese Projektionen wie ihre Abstände λ_1 und λ_2 von O

$$N_1 P_1 : N_2 P_2 = \lambda_1 : \lambda_2.$$

Die vom Beobachter beim Schätzen der Gestirnsgrößen gemessenen Abstände L werden um so kleiner gemessen, je größer diese Projektionen sind, und zwar gilt nach dem vorangehenden 3. Abschnitt

$$N_1 P_1 : N_2 P_2 = L_2 : L_1$$

und weil

$$N_1 P_1 : N_2 P_2 = \Delta k'_{1,p} : \Delta k'_{2,p},$$

so folgt

$$\lambda_1 : \lambda_2 = \Delta k'_{1,p} : \Delta k'_{2,p} = L_2 : L_1.$$

Die letztere Beziehung wollen wir dazu benutzen, die gemessenen L mit denen $\left(= \frac{1}{\Delta k_p} \right)$ zu vergleichen, welche resultieren, wenn unsere Anschauung richtig ist, d. h. die Projektionen der Durchdringungsstellen ihrer Größe nach durch das gerade vorhandene reelle Himmelsgewölbe bedingt werden.

In der folgenden Tabelle 14 ist dieser Vergleich für einen schönen Tag (4./6. 1917) durchgeführt. Die $\Delta k'$ und $\Delta k'_p$ sind von 10 zu 10° berechnet, wobei $n = 1000$ angenommen ist. An diesem Tage war das Himmelsgewölbe durch einen Halbwert $\varphi = 32^\circ$ charakterisiert. 32° entspricht genau dem Wert, den wir als Mittel einer großen Anzahl von Beobachtungen für einen hiesigen Sommertag angegeben haben.¹⁾

1) H. Dember und M. Uibe, 3 Bericht; Ber. d. math.-physikal. Klasse d. Kgl.-Sächs. Ges. d. Wiss. 69. S. 144. 1917. Ann. d. Phys. 55. S. 387. 1918.

Tabelle 14.

φ_k	$\Delta k'$	$\Delta k_p'$	L gerechnet ¹⁾	L gemessen		
			$= \frac{1}{\Delta k_p'} \times 3430$	mit 40er Scheibe auf 29,8er um- gerechnet	mit 29,8er Scheibe	Mittel
0—10°	185,1	142,4	24,0	25,0 m	24,0 m	24,5 m
10—20	157,5	123,6	27,8	29,0	28,3	28,7
20—30	133,4	108,5	31,5	32,0	32,8	32,4
30—40	113,4	96,5	35,5	35,3	36,9	36,1
40—50	98,2	87,5	39,2	38,9	40,1	39,5
50—60	87,0	80,9	42,4	41,2	42,8	42,0
60—70	79,2	76,2	44,8	43,8	44,8	44,3
70—80	74,2	73,2	46,7	45,1	45,9	45,5
80—90	72,0	71,9	47,7	—	—	—

Die Werte L_U und L_D beider Beobachter sind in der Tabelle durch Division der L_D mit 1,45 vereinigt.

Die Übereinstimmung der gerechneten und gemessenen Zahlen ist innerhalb der Schätzungsunsicherheit vollständig. Hierdurch ist wahrscheinlich gemacht, daß an günstigen Tagen die Projektion des erleuchteten Luftkegels auf eine zur Blickrichtung senkrechte Ebene, die sich an der Grenze des sichtbaren Himmelgewölbes befindet, als Gestirn der Größe nach wahrgenommen wird.

Zum gleichen Resultat führt die Diskussion der Mondbeobachtungen (vgl. Fig. 16). Sie kamen in derselben Weise zur Ausführung wie an der Sonne, nur wurden die Vergleichscheiben nachts von einer Lampe durchscheinend erleuchtet. Die Lampe trug einen diffus zerstreuenden Schirm, so daß die Leinwandscheiben gleichmäßig hell erschienen.

Die am 4.—5. Juni ausgeführten Beobachtungen zeigen deutlich, wie in der ersten Hälfte der Nacht die beobachteten Werte sich mit Hilfe eines Gewölbes darstellen lassen, dessen Halbwert $\varphi = 33^\circ$ ist, die zweite Hälfte mit einem höheren. Geschätzt wurden bei einer Mondhöhe $\varphi_k = 37,5^\circ$ ein Halbwert von $33,4^\circ$ und bei absteigendem Mond bei $\varphi_k = 29,5^\circ$ eine $\varphi = 35,7^\circ$. Der Tageshalbwert am 4./6. betrug 32° .

1) Der Zahlenfaktor, mit dem $\frac{1}{\Delta k_p'}$ hier und in folgenden Tabellen multipliziert ist, ist so gewählt, daß das Produkt mit dem Mittel der gemessenen L direkt verglichen werden kann.

Die Durchdringung des Mondlichtkegels liegt beim Aufgang des Mondes auf einem Gewölbe, das nur wenig höher ist als das Tagesgewölbe. Das der Vollmondnacht entsprechende Himmelsgewölbe tritt erst ein, nachdem die vom Sonnenlicht

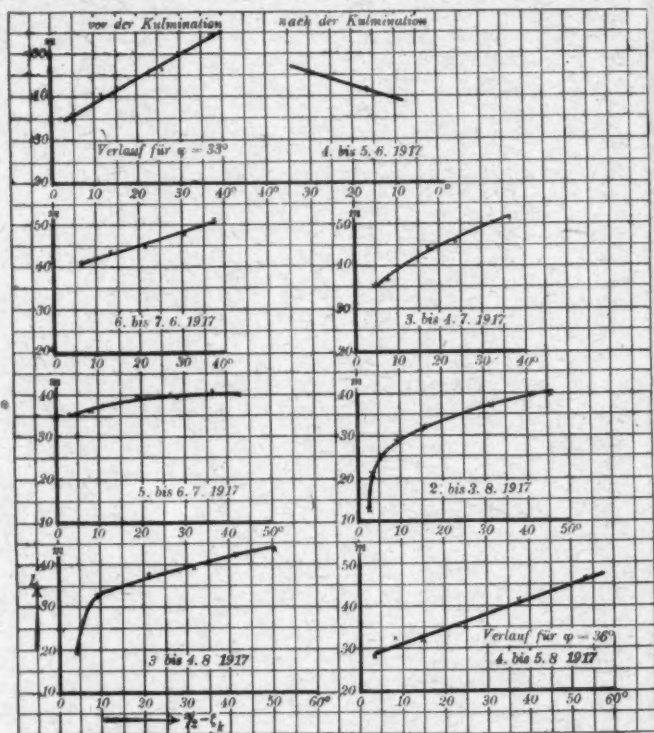


Fig. 16. Kurve 14.

hervorgerufene Dämmerung verschwunden ist. In der Nacht vom 4. auf 5./8. war der Halbwert des Gewölbes $q = 36^\circ$, und die Mondgrößen, die hier geschätzt wurden, entsprechen, wie der Verlauf der Kurve zeigt, diesem Wert. Der 4. Juni, 5. Juni und 4. August waren Tage mit geringem Dunst am Horizont, was sich in den Kurven durch den fast geradlinigen Verlauf und die geringe Steigung beim Mondaufgang kennzeichnet.

Tabelle 14a.

φ_k	$\Delta k'$	$\Delta k_p'$	$\frac{1}{\Delta k_p'} \cdot 5170$	L gemessen	Bemerkungen
0—10°	178	141	36,6	35,8 m	4.—5. Juni 1917
10—20	154	124	41,7	41,3	Geschätzter Halbwert
20—30	114	110	47,0	47,0	$\varphi = 33,4^\circ$; die Rechnung
30—40	89	99	52,1	52,4	ist für $\varphi = 33,0^\circ$ durch- geführt

Tabelle 14b.

Δ_k	$\Delta k'$	$\Delta k_p'$	$\frac{1}{\Delta k_p'} \cdot 4139$	L gemessen	Bemerkungen
0—10°	160	138	29,9	29,8 m	4.—5. August 1917
10—20	142	124	33,4	33,0	Halbwert für mittleren
20—30	128	114	36,3	36,4	Nachthimmel mit Mond-
30—40	114	104	39,8	39,8	schein $\varphi = 36,7^\circ$
40—50	104	97	42,6	43,2	Die Rechnung ist für
50—60	95	91	45,5	46,7	$\varphi = 36,0^\circ$ durchgeführt

In den vorstehenden Tabellen 14a und 14b sind für den 4.—5. Juni und 4.—5. August 1917 die berechneten $\frac{1}{\Delta k_p'}$ mit den gemessenen L zusammengestellt.

Trotzdem die Mondvergleichenen viel schwieriger sind als die Beobachtungen an der Sonne, ist die Übereinstimmung eine gute.

§ 6. Darstellung durch die Sichtweiten.

Die vorangehenden Ausführungen stützen sich auf die Annahme, daß das durch den Halbwert φ charakterisierte Himmels-
gewölbe auch in der Nähe des Gestirns vorhanden sei. Im Bericht Nr. 6¹⁾ haben wir darauf aufmerksam gemacht, daß dies im allgemeinen nur an sehr klaren Tagen der Fall ist, da sonst durch die besonders in der Nähe der Sonne vermehrten Helligkeiten die Sichtweiten und damit die Gestalt des Himmels beeinflußt werden. Die Zahlen der Tabelle 4 vom 8. Juli 1917, einem unruhigen Tage, lassen deutlich erkennen, welchen Einfluß ein Kondensationsvorgang in der Atmosphäre auf die scheinbare Größe der Gestirne ausübt.

1) H. Dember und W. Uibe, Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes. Ber. d. math.-physikal. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. S. 391. 1917.

Dasselbe zeigen die Beobachtungen vom 13/7. (Tabelle 8). Bei beginnender Trübung, die mit dem Auge als solche nicht erkennbar zu sein braucht, wächst die scheinbare GröÙe an. Bemerkenswert ist in dieser Hinsicht auch die Nachmittagskurve vom 21/7. 1917 (Tabelle 12 und Fig. 13), wo für die Entfernungen L am Nachmittag bei gleichen Sonnenhöhen kleinere Werte gemessen wurden als am Vormittage, was einer größeren scheinbaren GestirngröÙe entspricht.

Die Projektionen (NP) der Durchdringungsstellen sind um so größer, desto weiter sie vom Beobachter entfernt sind,

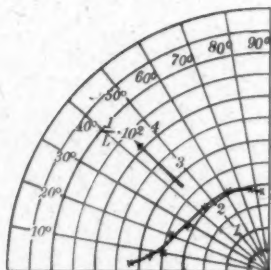


Fig. 17. Kurve 7a.

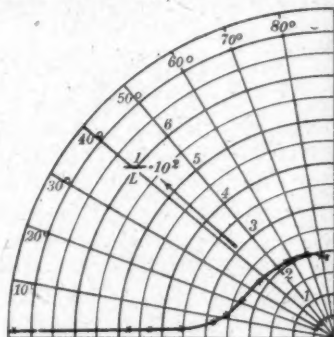


Fig. 18. Kurve 10a.

$\lambda_1 : \lambda_2 = \Delta k'_{1,p} : \Delta k'_{2,p}$, und da sich weiter verhält $\lambda_1 : \lambda_2 = L_1 : L_2$, so geben die reziproken Werte der gemessenen L als Radiivektoren unter dem Höhenwinkel φ_k von 0 aus abgetragen eine Bahn, auf der sich die Durchdringungsstellen bzw. ihre Projektionen abzeichnen. Diese so gezeichnete Bahn hat als Himmelsgewölbe in keinem Zeitpunkt bestanden und darf nicht mit der Form des Himmelsgewölbes in einem bestimmten Zeitpunkt verwechselt werden. Diese Bahn ist nur die Verbindungslinie der Abstandsendpunkte von 0 der projizierten Durchdringungsstellen, oder sie ist nur der Ort, den die Durchdringungsstellen tagsüber eingenommen haben. In Fig. 17 und 18 (Kurve 7a und 10a) sind diese Bahnen mit Hilfe der Mittelwerte von $1/L$ der Tabellen 7 und 10 auf diese Weise dargestellt.

Diese Bahnen müssen — wenn unsere im vorigen Bericht und die hier entwickelten Anschauungen richtig sind — mit denjenigen identisch sein, welche man durch Zuhilfenahme der Sichtweiten errechnet, die durch photometrische Messungen bestimmt werden oder mit anderen Worten, es soll die Entfernung der projizierten Durchdringungsstelle NP von O , welche aus dem durch Schätzung gewonnenen Scheibenstand L bestimmt ist, mit derjenigen identisch sein, die sich aus der photometrisch gemessenen Sichtweite errechnet.

Zwischen den Sichtweiten S und R zweier Himmelsstellen und ihren Helligkeiten H_1 und H_2 besteht die Beziehung¹⁾

$$S : R = \sqrt{H_1} : \sqrt{H_2}.$$

Um vergleichbare Werte für die Sichtweiten zu bekommen, und um mit diesen die *jeweilige* Lage der projizierten Durchdringungsstellen des vom Gestirn ausgehenden, die sichtbare Atmosphäre durchschneidenden Lichtkegels zu erhalten, haben wir nicht die in der Nähe der Sonne gefundenen — jedesmal auf den Zenit als Einheit bezogenen — Helligkeiten allein benutzt, sondern die Helligkeiten in Sonnennähe auf eine mittlere Helligkeit des Gesamthimmels bezogen. Zur Auswertung dieser mittleren Helligkeit dienten in jedem Falle rund 45 photometrische Einzelmessungen²⁾, die systematisch über dem ganzen Himmel verteilt worden waren. Die Wurzeln der so erhaltenen relativen Helligkeiten, als Sichtweiten vom Beobachtungspunkt O aus unter dem zugehörigen Höhenwinkel φ_k abgetragen, geben die gesuchte Bahn.

Nennen wir H_n die Helligkeit in der Sonnennähe und \bar{H}_s das Mittel aus den Helligkeiten des Gesamthimmels, zur gleichen Zeit wie H_n gemessen, so ist die Sichtweite in der Nähe der Sonne

$$S = \sqrt{\frac{H_n}{\bar{H}_s}}.$$

Die Tabellen 15 und 16 geben die für die Bahnkonstruktion benutzten Helligkeits-Mittelwerte und die Kurven 15 und 16 ihre graphische Darstellung wieder. Die photometrischen

1) Vgl. Bericht Nr. 6, § 2. Ber. d. math.-physikal. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. 395. 1917. Ann. d. Phys. 55. S. 387. 1918.

2) M. Uebe, Leipzig. Inaug.-Diss. 1919. Abhdlgn. d. math.-physikal. Kl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 35. Nr. 6. 1918.

Messungen sind an zwei typischen Sommertagen 1916 ausgeführt.

Tabelle 15.

22. Juni 1916 Mittleres φ_2	Relat. Helligkeit 10° über der Sonne im Sonnenvertikal = H_n	$\sqrt{H_n}$	Mittlere Helligkeit des Gesamthimmels = \overline{H}_w	$\sqrt{\overline{H}_w}$	$\sqrt{\frac{H_n}{\overline{H}_w}} \times 1,50^1)$
4,0° vorm.	21,2	4,60	3,43	1,85	3,73
20,1	8,40	2,90	3,39	1,84	2,87
35,0	5,12	2,26	2,70	1,64	2,07
56,7	3,00	1,73	1,87	1,29	2,01
74,6	1,80	1,34	0,88	0,91	2,21
84,0	0,75	0,87	0,42	0,65	2,01
72,6 nachm.	1,50	1,22	0,82	0,89	2,04
54,6	2,65	1,63	1,64	1,28	1,91
35,3	6,20	2,49	2,46	1,57	2,37
22,8	8,90	2,98	2,81	1,68	2,66

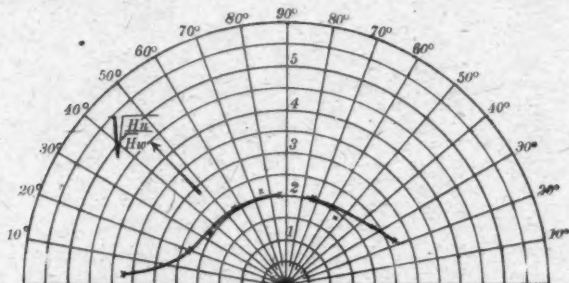


Fig. 19. Kurve 15.

Tabelle 16.

23. Juni 1916 Mittleres φ_2	Relative Helligkeit 10° über der Sonne im Vertikal = H_n	\sqrt{H}	Mittlere Helligkeit des Gesamthimmels = \overline{H}_w	$\sqrt{\overline{H}_w}$	$\sqrt{\frac{H_n}{\overline{H}_w}}$
0° vorm.	30,3	5,50	4,00	2,00	2,75
19,7	7,61	2,76	3,36	1,83	1,57
34,8	4,83	2,20	2,57	1,60	1,38
59,8	2,45	1,57	1,52	1,23	1,27
74,4	1,35	1,16	0,94	0,97	1,19
84,5	0,78	0,88	0,47	0,69	1,27

1) Der Faktor 1,50 ist so gewählt, daß ein Vergleich mit der Kurve auf Kurve Fig. 10a ohne weiteres möglich ist.

Ein Vergleich der Kurven 15 und 16 mit den aus den gemessenen L konstruierten 7a und 10a läßt den gleichen Charakter des Verlaufes erkennen.

Die photometrischen Messungen am 22. Juni 1916 (Tab. 15) und die Größenschätzungen am 17. Juli 1917 (Fig. 18) sind an zwei Tagen vorgenommen worden, die nach allen Bemerkungen des Beobachtungsjournals als gleich in bezug auf meteorologische Verhältnisse, vor allem auf Sichtigkeit der Luft, anzusehen sind. Hier ergibt sich nun quantitative Übereinstimmung der Kurven, wie es die folgende Tabelle 17 zeigt, wo die photometrisch gemessenen Sichtweiten ϱ mit den reziproken Werten der bei der Schätzung gefundenen L zusammengestellt sind.

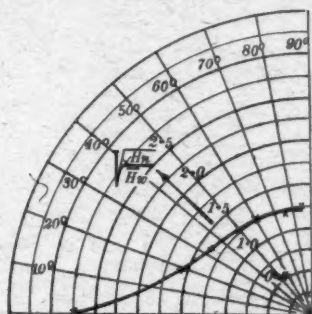


Fig. 20. Kurve 16.

Tabelle 17.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	ϱ	$\frac{1}{L}$
5°	3,37	3,25
10	2,75	2,70
20	2,80	2,35
30	2,18	2,23
40	2,10	2,13
50	2,07	2,08
60	2,04	2,05
70	2,04	2,00
80	2,03	1,94

Diese quantitative Übereinstimmung gibt die Möglichkeit, aus photometrischen Messungen der Himmelselligkeit, welche

die Sichtweite bestimmt, die vom Auge geschätzte Vergrößerung der Sonne zu berechnen.

§ 1. Ergebnis.

Den sichtbaren Größenänderungen von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont liegen physikalische Größen und Größenveränderungen zugrunde.

Die Möglichkeit der Durchführung dieser Untersuchung verdanken wir Mitteln, welche die kartellierten Deutschen Akademien, sowie die Solvaystiftung zur Verfügung gestellt haben.

Güfmar auf Teneriffa, August 1917.

(Eingegangen 28. Februar 1919.)

**4. Die reversible Permeabilität
auf der idealen Magnetisierungskurve¹⁾;
von Richard Gans.**

§ 1. *Einleitung.* Vor einigen Jahren habe ich eine Größe definiert²⁾, die ich reversible Permeabilität genannt habe. Ich habe dieselbe auf der jungfräulichen Magnetisierungskurve, dem aufsteigenden sowie dem absteigenden Hysteresisast gemessen und gefunden, daß ihr Wert, praktisch von der magnetischen Vorgeschichte unabhängig, eine reine Funktion der Magnetisierung ist. Diese Funktion habe ich später analytisch angeben können.³⁾

Inzwischen sind die interessanten Untersuchungen von Steinhaus und Gumlich⁴⁾ veröffentlicht worden, in denen ein Verfahren angegeben wird, eine von Hysteresis freie Magnetisierungskurve, die sogenannte ideale Magnetisierungskurve zu erzeugen.

Es schien mir von Interesse, zu sehen, ob auf dieser von den üblichen Magnetisierungskurven gänzlich verschiedenen Kurve die reversible Permeabilität auch denselben Wert als Funktion der Magnetisierung hat, weil im bejahenden Falle die von mir definierte Größe eine noch allgemeinere Bedeutung haben würde.

Zu dem Zwecke habe ich von vier Materialien, hartem Stahl, weichem Stahl, weichem Eisen und Nickel, die gewöhnliche und die ideale Magnetisierungskurve aufgenommen sowie

1) Vgl. auch R. Gans, Contribución al estudio de las ciencias, Universidad Nacional de La Plata 2. S. 145. 1918.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. 27. S. 1. 1908; 29. S. 301. 1909; 33. S. 1065. 1910; Verh. d. Deutschen phys. Ges. 12. S. 802. 1910; Phys. Zeitschr. 11. S. 988. 1910.

3) R. Gans, Phys. Zeitschr. 12. S. 1053. 1911.

4) W. Steinhaus u. E. Gumlich, Verh. d. D. Physik. Ges. 17. S. 369. 1915.

die reversible Permeabilität auf der jungfräulichen und auf der idealen Kurve beobachtet. Sie auch auf den Hysteresiskurven zu messen, war überflüssig, da ja bereits früher nachgewiesen war, daß jene Größe auf den Hysteresisästen denselben Wert hat, wie auf der Nullpunktskurve.

Die wichtigsten Ergebnisse der nachfolgenden Messungen sind, daß die ideale Kurve die von Steinhaus und Gumlich angegebene Form hat, insbesondere, daß diese Kurve im Nullpunkte senkrecht zur Abszissenachse steht, entsprechend einer unendlich großen Anfangspermeabilität, und zweitens, daß die reversible Permeabilität, als Funktion der Magnetisierung, in der Tat genau denselben Verlauf auf der Nullpunktskurve wie auf der idealen Kurve hat, so daß praktisch die reversible Suszeptibilität κ_r in jedem erreichbaren Punkte der MH -Ebene einen bestimmten durch die Parametergleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\kappa_r}{3\kappa_0} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}, \\ \frac{M}{M_\infty} = \operatorname{Ctg} x - \frac{1}{x} \end{cases}$$

gegebenen Wert hat. In ihnen bedeutet κ_r die Anfangsuszeptibilität, M_∞ die Sättigungsmagnetisierung.

§ 2. *Die ideale Magnetisierungskurve.* Bekanntlich kann man ein ferromagnetisches Material durch abnehmende magnetische Wechselfelder entmagnetisieren, indem man mittels dieses Verfahrens die mehr oder weniger gerichteten Elementarmagnete in größtmögliche Unordnung bringt.

Überlagert man dagegen einem konstanten Magnetfelde ein auf Null abnehmendes Wechselfeld, so bleibt eine Magnetisierung übrig, die, wie Steinhaus und Gumlich gezeigt haben, eine eindeutige Funktion des Feldes H ist, unabhängig von der Art und Weise, wie H seinen Wert angenommen hat.

Um sie zu messen, bediente ich mich der magnetometrischen Methode, indem ich eine Magnetisierungsspule von 54 cm Länge und 2,94 cm innerem, 3,52 cm äußerem Durchmesser benutzte. Der Draht war hierbei auf einen Zylinder gewickelt, der aus zwei konzentrischen Glasröhren bestand, zwischen denen Wasser lief, um die Spule zu kühlen.

Die Spule hatte $n = 104,0$ Windungen pro Zentimeter, so daß das in ihrem Inneren erzeugte Magnetfeld den Wert

$$\frac{H}{i} = \frac{4\pi n}{10} = 130,7 \frac{\text{Gauss}}{\text{Ampere}}$$

besaß.

Diese Spule war mit einer Kompensationsspule in üblicher Weise in Serie geschaltet. Außerdem befanden sich im Stromkreise eine Akkumulatorenbatterie von 120 Volt, ein Präzisionsamperemeter, regulierbare Widerstände und ein Stromwender.

Schließlich haben wir noch eine Impedanz von kleinem Ohmschen Widerstande eingeschaltet, um zu verhindern, daß die Wechselströme der Entmagnetisierungsspule im Kreise der Magnetisierungsspule Ströme induzierten.

Im Inneren der Magnetisierungsspule befand sich das zu studierende ferromagnetische Material in der Form eines verlängerten Rotationsellipsoids.

Die Magnetisierungsspule war coaxial umgeben von einer Entmagnetisierungsspule von 59 cm Länge und 5,44 cm mittlerem Durchmesser; sie bestand aus 4 Lagen, und zwar befanden sich $n_0 = 22,20$ Windungen auf einem Zentimeter Länge, so daß die von einem Ampere erzeugte Feldstärke

$$\frac{H_0}{J_0} = \frac{4\pi n_0}{10} = 27,90 \frac{\text{Gauss}}{\text{Ampere}}$$

war. Diese Spule war mit einem Entmagnetisierungsapparat ähnlicher Konstruktion wie der von Steinhaus und Gumlich¹⁾ benutzte verbunden.

Die Messungen der Magnetisierung auf der idealen Kurve gestalteten sich nun folgendermaßen. Zuerst wurde das Ellipsoid entmagnetisiert, dann wurde in der Magnetisierungsspule ein schwacher Strom erzeugt, um das Ellipsoid zu magnetisieren. Dieser Strom ruft eine kleine Abweichung der Magnetometernadel hervor, die aber enorm zunimmt, wenn man dem konstanten Feld den Entmagnetisierungsprozeß über-

1) W. Steinhaus u. E. Gumlich, a. a. O. S. 375 u. E. Gumlich u. W. Rogowski, Ann. d. Phys. **84**, S. 245. 1911.

lagert. Dann verstärkt man das stationäre Feld, wendet von neuem das Entmagnetisierungsverfahren an und fährt so fort, bis man genügend Punkte der idealen Kurve beobachtet hat.

Die Feldstärken wurden natürlich wegen der endlichen Länge der Ellipsoide gemäß der Formel

$$H = \frac{4\pi n i}{10} - NM$$

korrigiert, wo N den Entmagnetisierungskoeffizienten bedeutet.

Die Ellipsoide waren dieselben wie die in Ann d. Phys. 33. S. 1065 benutzten, jedoch hatten sich ihre magnetischen Eigenschaften im Laufe der Jahre etwas verändert.

1. Gehärteter Remystahl.

Große Halbachse $A = 15,55$ cm; kleine Halbachse $B = 0,6625$ cm; Entmagnetisierungskoeffizient $N = 0,06496$; Volumen $V = 28,59$ cm³.

Nullpunktskurve.

Absteigender Hysteresisast.

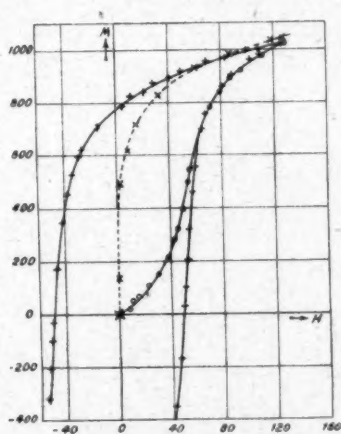
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
52,97	14,11	3,44	10,67	1023	194,7	66,5	128,2
109,4	30,05	7,11	22,94	1001	173,6	65,0	108,6
213,6	51,48	13,88	37,60	965,6	145,5	62,72	83,2
319,5	65,73	20,75	44,98	931,3	122,0	60,49	61,5
496,3	86,38	32,23	54,15	893,5	98,79	58,03	40,76
694,8	110,9	45,13	65,77	840,7	75,41	54,61	20,80
840,5	133,9	54,59	79,31	788,3	56,58	51,21	5,37
921,0	154,7	59,83	94,87	705,2	31,62	45,80	- 14,18
977,9	175,0	63,52	111,5	616,2	13,07	40,02	- 26,95
1023	195,1	66,50	128,6	524,7	0,0	34,30	- 34,30
				449,3	- 9,147	29,18	- 38,33
20,83	9,147	1,353	7,794	348,4	- 19,34	22,63	- 41,97
69,45	20,25	4,511	15,74	- 28,94	- 52,28	- 1,88	- 50,40
151,0	40,64	9,812	30,83	- 204,0	- 66,18	- 13,25	- 52,93
281,3	81,67	18,27	43,40	- 461,0	- 87,56	- 29,94	- 57,62
392,3	75,26	25,49	49,77	- 698,2	- 110,6	- 45,35	- 65,25
540,9	92,51	35,14	57,37	- 861,8	- 136,8	- 55,98	- 80,82
780,9	122,3	50,72	71,6	- 959,8	- 164,9	- 62,34	- 102,6
895,2	145,2	58,15	87,1	- 1023	- 193,6	- 66,5	- 127,1
956,1	164,2	62,10	102,1				
1023	195,5	66,45	129,0				

Aufsteigender Hysteresisast.

Ideale Kurve.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
-1023	-192,6	-66,4	-126,2	133,1	9,016	8,648	0,368
-995,9	-163,9	-64,7	-99,2	255,0	16,60	16,56	0,04
-956,8	-131,0	-62,15	-68,9	488,2	34,10	31,71	2,39
-921,0	-109,5	-59,83	-49,7	614,6	48,08	39,92	8,16
-877,0	-85,19	-56,97	-28,22	716,3	61,75	46,52	15,23
-827,1	-65,34	-53,73	-11,61	828,1	85,72	53,79	31,93
-715,2	-31,76	-46,45	+ 14,69	930,5	120,9	60,43	60,47
-591,2	- 9,147	-38,40	29,25	985,4	150,5	64,00	86,5
-519,3	0,0	-33,73	33,73	1037	185,8	67,38	118,4
-401,2	+ 15,03	-26,05	41,08	1047	195,5	68,05	127,4
-171,6	35,55	-11,15	46,70				
+ 98,97	57,37	+ 6,428	50,94				
319,2	75,14	20,73	54,41				
551,3	95,39	35,81	59,58				
757,0	117,0	49,17	67,8				
904,8	146,7	58,78	87,9				
980,4	173,6	63,68	109,9				
1023	196,8	66,45	130,4				

Die Resultate sind graphisch in Fig. 1 dargestellt.



Gehärteter Remystahl.

○ Nullpunktskurve + Hysteresiskurve × Ideale Kurve

Fig. 1.

2. Geglühter Remystahl.

 $A = 16,04 \text{ cm}; B = 0,660 \text{ cm}; N = 0,06138; V = 29,32 \text{ cm}^3.$

Nullpunktskurve.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
98,12	15,81	6,03	9,78
383,4	38,03	23,54	14,49
778,5	68,08	47,79	20,29
1000,0	91,47	61,42	30,05
1139,0	127,1	69,92	57,18
1200,0	161,4	73,72	87,66
1247,0	196,3	76,60	119,7
48,35	9,15	2,97	6,18
269,1	29,27	16,52	12,75
600,5	53,32	36,86	16,46
902,4	78,41	55,40	23,01
1095	108,3	67,22	41,08
1180	142,7	72,44	70,26
1231	181,9	75,58	106,3

Absteigender Hysteresisast.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
1243	193,3	76,3	117,0
1222	172,5	75,01	97,5
1199	143,7	73,57	70,1
1173	125,3	72,02	53,3
1113	95,52	68,32	27,20
1052	71,61	64,59	7,02
958,8	52,66	58,86	- 6,20
440,3	15,68	27,03	- 11,35
201,9	0,0	12,40	- 12,40
68,3	- 9,147	4,191	- 13,34
- 51,2	- 16,07	- 3,144	- 12,93
- 338,2	- 36,59	- 20,76	- 15,83
- 585,5	- 52,93	- 35,94	- 16,99
- 926,6	- 80,63	- 56,89	- 23,74
- 1106	- 110,6	- 67,87	- 42,7
- 1200	- 153,5	- 73,72	- 79,8
- 1245	- 193,9	- 76,42	- 117,5

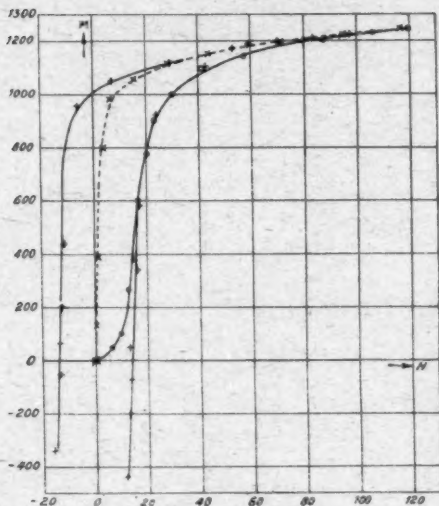
Aufsteigender Hysteresisast.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
- 1245	- 193,2	- 76,4	- 116,8
- 1214	- 158,1	- 74,56	- 83,5
- 1189	- 131,7	- 72,95	- 58,7
- 1149	- 105,9	- 70,52	- 35,4
- 1096	- 80,37	- 67,32	- 13,05
- 1037	- 62,59	- 63,65	+ 1,06
- 813,2	- 39,59	- 49,92	10,33
- 527,9	- 20,51	- 32,41	11,90
- 345,8	- 9,016	- 21,23	12,21
- 209,4	0,0	- 12,85	12,85
0,0	+ 13,46	0,0	13,46
+ 284,2	33,19	+ 17,45	15,74
482,7	46,51	29,64	16,87
789,6	69,13	48,48	20,65
1007	92,26	61,77	30,49
1147	126,5	70,36	56,1
1216	165,7	74,64	91,1
1247	194,7	76,60	118,1

Ideale Kurve.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
136,6	9,147	8,381	0,766
389,6	25,55	23,91	1,64
608,1	39,20	37,34	1,86
798,7	52,53	49,04	3,49
984,0	66,65	60,40	6,25
1053	80,31	64,66	15,65
1115	96,45	68,48	27,97
1149	114,6	70,55	44,0
1197	145,1	73,45	71,6
1225	170,4	75,19	95,2
1250	193,4	76,78	116,6

Die Resultate sind graphisch in Fig. 2 dargestellt.



Geglühter Remystahl.

○ Nullpunktskurve + Hysteresiskurve × Ideale Kurve

Fig. 2.

3. Weiches Eisen.

$A = 15,99$ cm; $B = 0,3995$ cm; $N = 0,02654$; $V = 10,69$ cm³.

Nullpunktskurve.

Absteigender Hysteresisast.

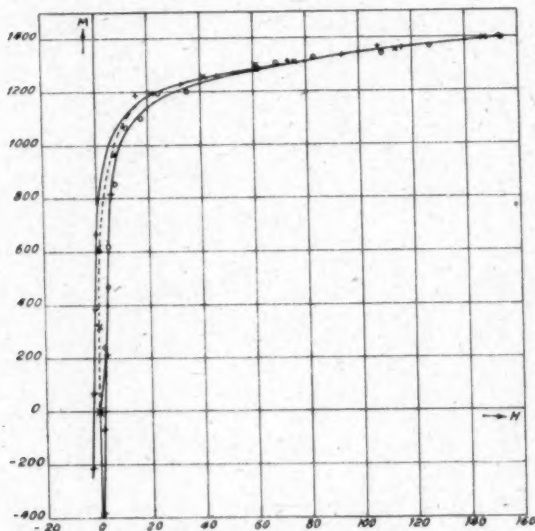
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
212,0	9,018	5,627	3,391	1384	189,2	36,72	152,5
471,2	16,99	12,50	4,49	1360	152,3	36,09	116,2
851,3	30,06	22,59	7,47	1337	129,3	35,46	93,8
1102	46,79	29,23	17,56	1305	109,8	34,63	75,2
1203	67,05	31,95	35,10	1293	95,41	34,32	61,09
1281	95,81	34,01	61,80	1231	65,36	32,68	32,68
1337	144,2	35,46	108,7	1184	46,79	31,42	15,37
1395	190,3	37,03	153,3	667,4	17,26	17,71	0,45
				384,8	9,018	10,21	1,19
238,7	9,018	6,336	2,682	70,66	0,0	1,875	1,87
620,3	20,91	16,46	4,45	215,9	9,018	5,731	3,29
1067	39,99	28,30	11,69	817,4	27,84	21,69	6,15
1192	55,68	31,63	24,05	1293	95,81	34,33	61,48
1260	80,52	33,44	47,08	1317	110,2	34,94	73,3
1285	95,41	34,11	61,30	1364	143,0	36,20	106,8
1305	103,5	34,63	68,9	1403	190,1	37,22	152,9
1328	118,4	35,26	83,1				
1368	163,0	36,30	126,7				
1395	189,5	37,03	152,5				

Aufsteigender Hysteresisast.

Ideale Kurve.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
-1403	-188,2	-37,22	-151,0	318,8	8,888	8,461	0,427
-1372	-151,5	-36,40	-115,1	614,1	17,12	16,29	0,83
-1326	-112,4	-35,20	-77,2	1063	35,30	28,21	7,09
-1515	-97,12	-34,90	-62,22	1198	53,26	31,78	21,48
-1270	-72,02	-33,69	-38,33	1255	74,97	33,32	41,66
-1214	-53,46	-32,22	-21,24	1294	95,74	34,35	61,39
-878,6	-23,14	-23,33	+ 0,19	1307	110,1	34,68	75,4
-400,5	-8,758	-10,63	1,87	1352	150,0	35,88	114,1
-82,45	0,0	-2,189	2,189	1395	184,5	37,01	147,5
+ 218,3	+ 9,018	+ 5,793	3,225				
608,5	20,91	16,15	4,76				
988,8	35,94	26,24	9,70				
1261	79,47	33,47	46,00				
1309	104,0	34,73	69,3				
1337	125,1	35,46	89,6				
1379	156,9	36,61	120,3				
1398	188,7	37,11	151,6				

Die Resultate sind graphisch in Fig. 3 dargestellt.



Weiches Eisen.

○ Nullpunktsskurve

+ Hysteresiskurve

× Ideale Kurve

Fig. 3.

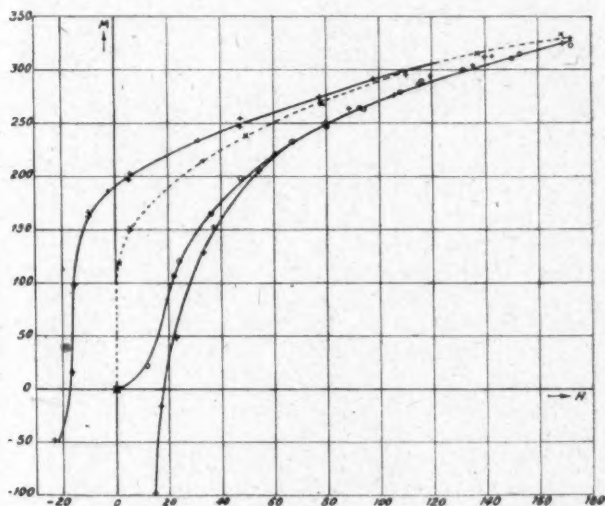
4. Nickel.

$A = 16,05 \text{ cm}$; $B = 0,6606 \text{ cm}$; $N = 0,06142$; $V = 29,38 \text{ cm}^3$.

Nullpunktskurve.

Absteigender Hysteresisast.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
34,04	15,81	2,090	13,72	324,2	189,5	19,91	169,6
164,8	46,39	10,13	36,25	310,6	159,0	19,07	139,9
209,0	67,97	12,84	55,13	294,1	128,5	18,06	110,4
247,1	95,15	15,18	79,97	276,4	95,54	16,97	78,57
278,7	125,3	17,12	108,2	246,7	62,61	15,16	47,45
298,5	150,0	18,33	131,7	233,9	46,52	14,36	32,16
322,3	192,2	19,80	172,4	196,8	17,39	12,09	5,30
				162,5	0,0	9,979	- 9,98
22,47	13,20	1,380	11,82	- 48,93	- 26,01	- 3,004	- 23,01
120,3	31,63	7,389	24,24	- 152,2	- 46,79	- 9,344	- 37,45
197,4	59,47	12,13	47,34	- 219,5	- 74,11	- 13,48	- 60,63
232,9	81,56	14,31	67,25	- 263,3	- 104,4	- 16,17	- 88,2
264,4	108,5	16,25	92,3	- 294,1	- 137,6	- 18,06	- 119,5
286,4	133,0	17,59	115,4	- 326,2	- 192,2	- 20,04	- 172,7
314,4	172,6	19,31	153,3				
323,9	189,5	19,90	169,6				



Nickel.

○ Nullpunktskurve + Hysteresiskurve × Ideale Kurve

Fig. 4.

Aufsteigender Hysteresisast.				Ideale Kurve.			
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
-326,9	-190,3	-20,07	-170,2	65,70	4,378	4,035	0,343
-312,5	-161,9	-19,20	-142,7	117,1	9,018	7,194	1,824
-306,8	-141,1	-18,85	-122,3	149,4	15,03	9,177	5,85
-293,1	-115,5	-18,00	-97,5	213,9	46,39	13,14	33,25
-275,0	-94,10	-16,89	-77,21	237,1	64,04	14,56	49,48
-254,4	-62,73	-15,63	-47,10	269,7	94,75	16,57	78,18
-238,0	-46,01	-14,62	-31,39	298,5	129,0	18,33	110,7
-202,3	-18,30	-12,43	-5,87	313,9	155,8	19,28	136,5
-185,8	-9,018	-11,41	+ 2,39	331,8	189,1	20,38	168,7
-166,6	0,0	-10,23	10,23				
-97,86	9,149	-6,011	15,16				
-15,85	17,77	-0,973	16,80				
+128,1	41,04	+ 7,87	33,17				
205,1	67,05	12,60	54,45				
248,9	94,88	15,29	79,59				
276,4	122,8	16,97	105,8				
303,6	153,8	18,65	135,2				
329,1	192,2	20,20	172,0				

Die Resultate sind graphisch in Fig. 4 dargestellt.

§ 3. *Die reversible Permeabilität.* Um die reversible Permeabilität zu messen, benutzten wir eine Versuchsanordnung ähnlich der, welche wir in den eingangs zitierten Arbeiten verwandt hatten, so daß einige wenige Worte über dieselbe genügen werden.

Um die kleinen Variationen ΔH der Feldstärke zu erzeugen, war die Magnetisierungsspule von einer anderen Spule umgeben, welche mit einem Akkumulator, einem Widerstande und einem Kommutator zu einem Stromkreise vereinigt war.

Diese zweite Spule hatte die folgenden Abmessungen. Ihr innerer und äußerer Durchmesser waren 3,52 cm bzw. 3,80 cm. Die Windungszahl pro Zentimeter betrug $n' = 34,35$, so daß $4\pi n' = 431,6$ war.

Wendet man mittels des Kommutators die Richtung des schwachen Stromes, der durch diese Spule floß, so ändert sich ein wenig das starke von der Magnetisierungsspule erzeugte Feld.

Die Änderung ΔB der Induktion im Ellipsoid, die durch die Feldänderung ΔH hervorgerufen wurde, wurde ballistisch beobachtet mittels einer Spule, welche direkt auf das Ellipsoid gewickelt und mit einem ballistischen Galvanometer verbunden

war. Die Empfindlichkeit dieses Instrumentes wurde durch eine geeichte wechselseitige Induktion bestimmt.

Es möge noch ein kleiner Hilfsapparat beschrieben werden, der die Bequemlichkeit und Exaktheit der Messungen sehr vergrößerte.

Wegen der großen Galvanometerempfindlichkeit, die notwendig war, um die kleine durch ΔH hervorgerufene Änderung des magnetischen Induktionsflusses zu beobachten, ließ jede kleinste Schwankung des starken Stromes in der Magnetisierungsspule, die durch veränderliche Kontakte in den Schiebewiderständen entstand, das ballistische Galvanometer ausschlagen.

Ich vermied früher diese Störungen durch häufige und recht lästige Reinigung der Kontakte, zog es aber jetzt vor, die Unannehmlichkeit durch Anwendung des folgenden „Beruhigungsapparates“ zu umgehen.

Im Innern einer Primärspule B_1 (Fig. 5) von 4 Lagen und 1096 Windungen befand sich koaxial eine Sekundärspule B_2 von 1200 Windungen. Beide waren auf einem Holzstativ montiert.

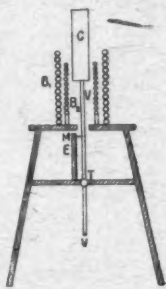


Fig. 5.

In ihrem Innern befand sich ein Zylinder C aus weichem Eisen, der mittels des Messingstabes $V V$ in Richtung seiner Achse verschiebbar und mittels der Druckschraube T in jeder Stellung fixierbar war. Diese Stellung konnte jederzeit reproduziert werden, da sie mit Hilfe des Zeigers M auf der Skala E ablesbar war.

Durch die Primärspule B_1 , welche mit der Magnetisierungsspule in Serie geschaltet war, floß also der Magnetisierungsstrom, der, wie wir sagten, niemals bis zum Äußersten konstant blieb. Nun befand sich aber die Spule B_2 im ballistischen Stromkreise, und zwar der Spule, die unmittelbar auf das Ellipsoid gewickelt war, entgegengeschaltet, so daß jede Stromschwankung in diesen beiden Spulen Induktionen von entgegengesetztem Vorzeichen hervorrief. Es war leicht, mittels einiger Versuche die Stellung des Eisenzylinders zu finden, bei der sich die Schwankungen genau kompensierten.

Eine ideale Anordnung, die ich aber leider nicht ausführen konnte, da ich von jeder Materialsorte nur ein Ellipsoid hatte,

wäre die folgende gewesen. Der Beruhigungsapparat müßte als Primärspule B_1 eine Spule enthalten, die genau gleich der Magnetisierungsspule wäre; in ihr müßte sich ein dem zu studierenden Ellipsoid gleiches befinden, und beide Ellipsoide müßten von gleichen ballistischen Spulen umgeben sein. Letztere hätte man so in Serie zu schalten, daß eine Schwankung des Magnetisierungsstromes keinen Galvanometeraus-
schlag hervorriefe. Über die Magnetisierungsspule sowie über B_1 wäre je eine Spule zu wickeln, deren Strom das Zusatzfeld ΔH erzeugt, diese aber müßten so in Serie geschaltet werden, daß ihre Induktionswirkungen sich im ballistischen Kreise summierten.

Die Beobachtungen ergaben die folgenden Resultate.

1. Gehärteter Remystahl.

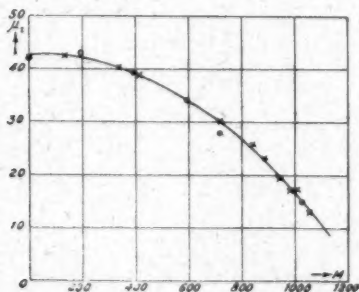
Ideale Kurve.

M	μ_r
0,0	42,34
134,6	41,64
412,4	38,84
938,7	19,46
980,0	17,08
1054	12,97
0,0	42,29
0,0	42,50
719,7	30,41
841,4	25,69
0,0	41,59
337,8	40,25
885,3	23,34
1006	17,21

Nullpunktskurve.

M	μ_r
0,0	41,81
192,1	43,16
397,3	39,41
593,4	34,02
712,9	27,98
1026	15,08

Die Resultate sind graphisch in Fig. 6 dargestellt.



Gehärteter Remystahl.

× Ideale Kurve

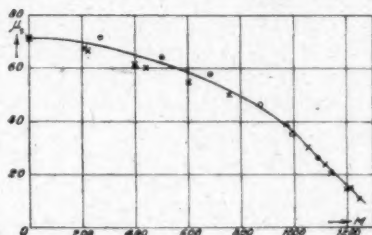
○ Nullpunktskurve

Fig. 6.

2. Geglühter Remystahl.

Ideale Kurve.	
M	μ_r
0,0	72,15
400,2	61,72
757,8	49,72
1054	29,89
1138	20,67
1200	14,72
1242	10,80
0,0	70,66
221,8	66,68
0,0	70,61
209,9	67,19
441,7	60,03
603,4	54,36
0,0	70,66
971,2	39,08
1119	23,86
1216	15,07

Nullpunktskurve.	
M	μ_r
0,0	71,06
271,6	71,81
503,0	64,13
687,3	57,94
989,5	35,26
873,2	46,40
1091	26,32



Geglühter Remystahl.

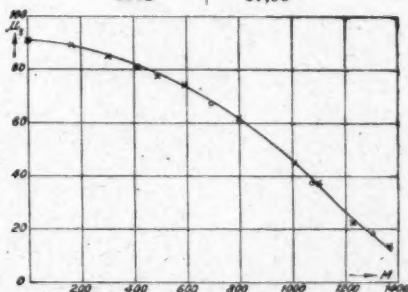
× Ideale Kurve ○ Nullpunktskurve

Fig. 7.

3. Weiches Eisen.

Ideale Kurve.]	
M	μ_r
0,0	92,83
307,8	85,04
592,8	74,61
1099	37,43
1228	22,63
1367	13,76
0,0	89,62
164,9	89,74
490,8	77,49
798,7	62,13
1010	45,21

Nullpunktskurve.	
M	μ_r
0,0	92,02
417,0	81,25
693,4	67,28
1073	37,83
1302	17,96



× Ideale Kurve ○ Nullpunktskurve

Fig. 8. Weiches Eisen.

Die Resultate sind graphisch in Fig. 8 dargestellt.

4. Nickel.

Ideale Kurve.		Nullpunktskurve.	
M	μ_r	M	μ_r
0,0	11,20	0,0	11,18
115,1	11,05	76,78	11,32
143,9	10,89	172,2	10,53
216,1	9,845	251,6	8,812
248,9	9,014	284,6	7,900
272,8	8,418	314,4	6,741
297,9	7,432		
317,3	6,778		
329,5	6,169		

Die Resultate sind graphisch in Fig. 9 dargestellt.

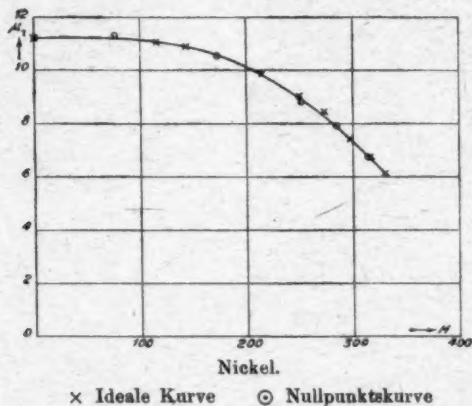


Fig. 9.

Aus den Messungen geht klar hervor, daß die reversible Permeabilität auf der idealen und der Nullpunktskurve genau die gleiche Funktion der Magnetisierung ist.

Nur der geglähten Remystahl fügt sich nicht diesem Gesetze, doch haben wir schon früher¹⁾ den Verdacht geäußert, daß das Material, aus welchem das betreffende Ellipsoid gefertigt war, nicht homogen ist.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 33. S. 1092. 1910.

§ 4. *Magnetisch korrespondierende Zustände.* Zum Schluß wollen wir noch das durch Gleichung (1) ausgedrückte quantitative Gesetz für die Abhängigkeit der reversiblen Permeabilität von der Magnetisierung prüfen.

Es ergaben sich die folgenden Tabellen und Kurven.

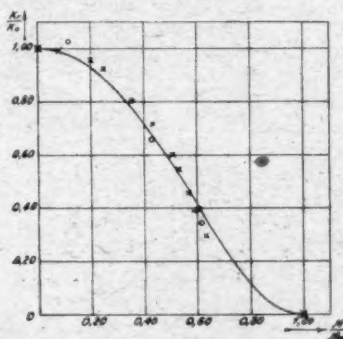
1. Gehärteter Remystahl (vgl. Fig. 10).

Ideale Kurve.

M	$4\pi x_r$	$\frac{M}{1667}$	$\frac{4\pi x_r}{41,00}$
0,0	41,18	0,0	1,004
134,6	40,64	0,0807	0,9910
337,8	39,25	0,2026	0,9572
412,4	37,84	0,2474	0,9230
719,7	29,41	0,4317	0,7171
841,5	24,69	0,5048	0,6022
885,3	22,34	0,5310	0,5449
938,7	18,46	0,5631	0,4502
980,0	16,08	0,5879	0,3921
1006	16,21	0,6034	0,3954
1054	11,97	0,6324	0,2919

Nullpunktskurve.

M	$4\pi x_r$	$\frac{M}{1667}$	$\frac{4\pi x_r}{41,00}$
0,0	40,81	0,0	0,9954
192,1	42,16	0,1153	1,028
397,3	38,41	0,2383	0,9369
593,4	33,02	0,3560	0,8054
712,9	26,98	0,4277	0,6582
1026	14,08	0,6155	0,3434



Gehärteter Remystahl $M_{\infty} = 1667$; $4\pi x_0 = 41,00$

× Ideale Kurve ○ Nullpunktskurve

Fig. 10.

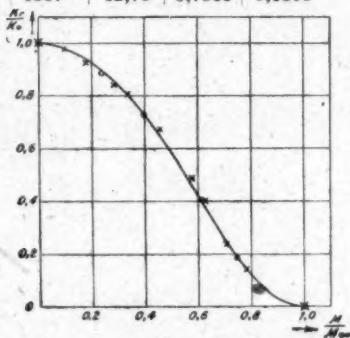
Die in den Figuren gezeichnete Kurve ist die theoretische, die Kreuze und Kreise entsprechen den Beobachtungen auf der idealen bzw. jungfräulichen Kurve. Der Punkt

$$\frac{M}{M_{\infty}} = 1; \quad \frac{x_r}{x_0} = 0$$

ist mit in die Figur eingezeichnet, er entspricht der bekannten Tatsache, daß die Suszeptibilität im Sättigungszustande Null ist.

2. Weiches Eisen (vgl. Fig. 11).

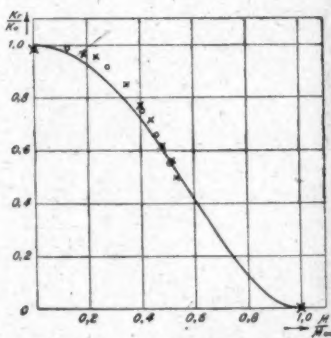
Ideale Kurve.			
M	$4\pi \kappa_r$	$\frac{M}{1750}$	$\frac{4\pi \kappa_r}{91,00}$
0,0	90,22	0,0	0,9914
164,9	88,74	0,0942	0,9752
307,8	84,04	0,1759	0,9237
490,8	76,49	0,2804	0,8406
592,8	73,61	0,3387	0,8091
798,7	61,13	0,4564	0,6717
1010	44,21	0,5772	0,4859
1099	36,43	0,6281	0,4004
1228	21,63	0,7018	0,2378
1367	12,76	0,7811	0,1403



$M_{\infty} = 1750$; $4\pi \kappa_s = 91,00$
 × Ideale Kurve ○ Nullpunktskurve

Fig. 11. Weiches Eisen.

Nullpunktskurve.			
M	$4\pi \kappa_r$	$\frac{M}{1750}$	$\frac{4\pi \kappa_r}{91,00}$
0,0	91,02	0,0	1,000
417,7	80,25	0,2386	0,8820
693,4	66,28	0,3962	0,7285
1073	36,83	0,6132	0,4048
1302	16,95	0,7439	0,1863



$M_{\infty} = 620$; $4\pi \kappa_s = 10,40$
 × Ideale Kurve ○ Nullpunktskurve

Fig. 12. Nickel.

3. Nickel (vgl. Fig. 12).

Ideale Kurve.			
M	$4\pi \kappa_r$	$\frac{M}{620}$	$\frac{4\pi \kappa_r}{10,40}$
0,0	10,20	0,0	0,9804
115,1	10,05	0,1857	0,9663
143,9	9,89	0,2321	0,9510
216,1	8,845	0,3485	0,8506
248,9	8,014	0,4015	0,7705
272,8	7,418	0,4400	0,7134
297,9	6,432	0,4805	0,6184
317,3	5,778	0,5118	0,5556
329,5	5,169	0,5315	0,4971

Nullpunktskurve.			
M	$4\pi \kappa_r$	$\frac{M}{620}$	$\frac{4\pi \kappa_r}{10,40}$
0,0	10,18	0,0	0,9790
76,78	10,32	0,1239	0,9922
172,2	9,53	0,2777	0,9164
251,6	7,812	0,4058	0,7513
284,6	6,900	0,4590	0,6634
314,4	5,741	0,5071	0,5521

Während das weiche Eisen in hervorragender Weise der Theorie entspricht, zeigen die härteren Materialien, wie Stahl und Nickel, kleine Abweichungen, jedoch sind diese so unbedeutend, daß man praktisch die ganze reversible Permeabilitätskurve aus der Anfangspermeabilität und der Sättigungsmagnetisierung berechnen kann.

La Plata, 1. November 1917, Instituto de Física.

(Eingegangen 23. August 1919.)

5. Die Trägheitsmomente der Magnetonen;¹⁾ von R. Gans.

In einer früheren Arbeit²⁾ habe ich eine Formel für die spezifische Suszeptibilität diamagnetischer Körper [(a. a. O., Formel (60))] in ihrer Abhängigkeit von der Feldstärke und Temperatur abgeleitet.

Diese Beziehung vereinfacht sich noch auf Grund der im hiesigen Institut angestellten experimentellen Untersuchungen des Hrn. H. Isnardi³⁾, welche zeigten, daß die Suszeptibilität tatsächlich nicht vom Felde abhängig ist, woraus man nach meiner Theorie den Schluß ziehen kann, daß die drei Hauptträgheitsmomente der Magnetonen einander gleich sind. So nimmt die Formel für die spezifische Suszeptibilität χ die Form an

$$(1) \quad \chi = -N \frac{e^2}{4m^2} J,$$

wo N die Anzahl Magnetonen im Gramm, $e/m = 1,77 \cdot 10^9$ die in elektromagnetischem Maß gemessene spezifische Ladung des Elektrons, J das Trägheitsmoment des Magnetons bezüglich einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Achse bedeutet.

Nimmt man an, daß jedes Atom nur ein Magneton enthält, so ist das Produkt aus N und dem Atomgewicht A die Anzahl Atome im Grammatom, d. h. die bekannte Avogadro'sche Zahl

$$(2) \quad N_0 = N A = 6,175 \cdot 10^{23}.$$

Multipliziert man (1) mit A , so erhält man

$$(3) \quad A \chi = -N_0 \frac{e^2}{4m^2} J$$

oder

$$(4) \quad J = -2,067 \cdot 10^{-38} A \chi.$$

1) Vgl. R. Gans, Contribución al estudio de las ciencias, Univ. Nacional de La Plata 1. S. 383. 1916.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. 49. S. 149. 1916.

3) H. Isnardi, Contribución al estudio de las ciencias, Univ. Nacional de La Plata.

Es läßt sich also das Trägheitsmoment aus der Atom-
suszeptibilität $A\chi$ berechnen.

In der folgenden Tabelle haben wir auf Grund der von
Owen¹⁾ bestimmten Magnetisierungskonstanten die Werte von
 J in absolutem Maß ausgewertet.

Element	A	$-\chi \cdot 10^6$	$J \cdot 10^{48}$ in g cm^2	Element	A	$-\chi \cdot 10^6$	$J \cdot 10^{48}$ in g cm^2
Be	9,1	1,00	1,88	Zr	90,6	0,45	8,48
B	11,0	0,7	1,59	Ag	107,9	0,20	4,46
C (Diamant)	12,0	0,49	1,22	Cd	112,4	0,18	4,18
Si	28,8	0,13	0,761	Jn	114,8	0,11	2,61
P	31,0	0,90	5,77	Sn (Grauzinn)	119,0	ca. 0,35	ca. 8,61
S	32,07	0,49	3,25	Sb	120,2	0,82	20,4
Cu	63,57	0,085	1,12	Te	127,5	0,32	8,48
Zn	65,37	0,155	2,09	J	126,9	0,86	9,45
Ga	69,9	0,24	3,46	Cs	132,8	0,10	2,75
Ge	72,5	0,12	1,80	Au	197,2	0,15	6,12
As	75,0	0,31	4,81	Hg	200,0	0,19	7,86
Se	79,2	0,32	5,24	Tl	204,0	0,24	10,1
Br	79,92	0,40	6,61	Pb	207,1	0,12	5,14
Sr	87,62	0,2?	3,62?	Bi	208,0	1,40	60,2

Es ist bemerkenswert, daß fast alle Trägheitsmomente
von derselben Größenordnung sind.

Die Trägheitsmomente paramagnetischer Magnetonen²⁾
sind wesentlich größer; es ergab sich nämlich für Platin
 $67,7 \cdot 10^{-40}$ und für wasserfreies Mangansulfat $12,4 \cdot 10^{-40}$.

Ebenso sind die Trägheitsmomente des HCl- und des
 H_2O -Moleküls viel größer, für die Bjerrum³⁾ $5,4 \cdot 10^{-40}$ bzw.
 $0,96$ und $2,21 \cdot 10^{-40}$ fand.

La Plata, 1. März 1917. Instituto de Fisica.

1) M. Owen, Ann. d. Phys. **37**. S. 664. 1912.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **50**. S. 163. 1916.

3) N. Bjerrum, Nernst-Festschrift S. 90, 1912; Verb. d. Deutsch.
phys. Ges. **16**. S. 640. 1914; vgl. auch Verb. d. Solvay Congresses,
deutsche-Ausgabe von Eucken S. 405, 1911.

(Eingegangen 23. August 1919)

**6. Bemerkung zu meiner Arbeit „Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium“;
von R. Gans.**

Kürzlich veröffentlichte ich¹⁾ eine theoretische Untersuchung über die Fortpflanzung des Lichts in einem inhomogenen Medium, welche im wesentlichen die Ergebnisse hatte, daß das Licht sich ohne Reflexion fortpflanzt, daß es aber Totalreflexion gibt.

Ferner zeigte ich, daß überall die Regeln der geometrischen Optik über die Richtung des Strahles gelten außer in der Nähe der Ebene, in der die Totalreflexion eintritt. Hier ist der Einfallswinkel kleiner, als es dem Snelliusschen Brechungsgesetze entspricht, und hier kann auch nicht von einem Umbiegen des Strahls gesprochen werden, sondern er kehrt mit einem Knick von endlichem Winkel um.

Nun hat Lord Rayleigh²⁾ schon früher einen Aufsatz über den Durchgang von Schallwellen durch ein geschichtetes Medium publiziert, der mir leider infolge der schlechten argentinischen Bibliotheksverhältnisse entgangen war, und von dem ich erst im November 1915 durch einen Separatabdruck Kenntnis erhielt, den der Verfasser mir zusandte.³⁾

Sonst hätte ich natürlich nicht verfehlt, die Arbeit Lord Rayleighs zu zitieren, ja ich hätte sogar, trotzdem es sich bei ihm um ein akustisches, bei mir um ein elektromagnetisches Problem handelte, manches seiner Resultate direkt verwenden können.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 47. S. 709. 1915.

2) Lord Rayleigh, Proc. of the Royal Soc. (A) 86. S. 207. 1912.

3) In diesem Zusammenhang sei auch eine Arbeit von J. Bousinesq, C. R. 129. 1899 erwähnt, welche auch Lord Rayleigh entgangen zu sein scheint. Der Verf. steht auf dem Boden der elastischen Lichttheorie und geht auf das interessante Problem der Totalreflexion gar nicht ein.

In der Diskussion der Einzelheiten ging ich über Lord Rayleigh in einigen Punkten hinaus und griff die Aufgabe insofern allgemein an, als er *aus mathematischen Gründen* die Dichte als lineare Funktion der Koordinate betrachtete, während ich durch einen Kunstgriff, der dem des Helmholtzschen Orgelpfeifenproblems ähnlich ist, zu einer solchen beschränkenden Annahme nicht gezwungen war.

Schließlich glaubt Lord Rayleigh, die Totalreflexion in inhomogenen Medien sei natürlicher als eine Art Brechung (Umbiegen des Strahls) aufzufassen (a. a. O., S. 224). Mit dieser Meinung kann ich mich wegen des von mir gefundenen Knicks, den der Strahl erleidet, nicht einverstanden erklären. Es tritt eine wirkliche Unstetigkeit infolge von Reflexion auf.

La Plata, 30. Nov. 1915. Instituto de Física.

(Eingegangen 23. August 1919.)

**7. Oszillatoren von zwei und drei Freiheitsgraden.
Ein Beitrag zur Quantentheorie;
von R. Gans.**

Planck¹⁾ hat in seiner Arbeit über die physikalische Struktur des Phasenraumes gezeigt, in welcher Weise der Phasenraum in Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit zerlegt werden kann. Mittels dieser Resultate und der Ergebnisse einer früheren Untersuchung²⁾ kann man die für die Thermodynamik wichtigen Funktionen für den Fall von Oszillatoren von zwei und drei Freiheitsgraden berechnen.

Die Durchführung dieses Problems und der Vergleich der Endformeln mit der Erfahrung ist deshalb von Interesse, weil die schwingungsfähigen Teilchen in den praktisch untersuchten Körpern sicherlich häufig nicht lineare Vibratoren waren, sondern mehr Freiheitsgrade hatten.

Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn man die Zustandssumme

$$(1) \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{-\frac{\bar{U}_n}{kT}}$$

einführt, in der T die absolute Temperatur, \bar{U}_n die mittlere Energie eines Teilchens im n ten Elementargebiet, p_n das Verhältnis der Größe des n ten zum nullten Elementargebiet bedeutet.

Aus der Funktion Z berechnen sich alle thermodynamisch wichtigen Funktionen, wie die freie Energie F und die Energie U nach den folgenden Gleichungen²⁾ (N Anzahl der Oszillatoren)

$$(2) \quad F = -NkT \ln Z,$$

$$(3) \quad U = -Nk \frac{d \ln Z}{d \frac{1}{T}}.$$

1) M. Planck, Ann. d. Phys. (4) 50. S. 385. 1916 (im folgenden zitiert als „Planck I“).

2) M. Planck, Verh. d. Deutschen phys. Ges. 17. S. 407. 1915 (im folgenden zitiert als „Planck II“).

I. Lineare Oszillatoren.

Um die für Oszillatoren von zwei und drei Freiheitsgraden gültigen Resultate mit den bekannten Formeln für lineare Oszillatoren vergleichen zu können, stellen wir letztere noch einmal kurz zusammen.

Nach Planck¹⁾ gilt für geradlinige Oszillatoren der Schwingungszahl ν

$$(4) \quad p_n = 1; \quad \overline{U}_n = h\nu(n + \frac{1}{2}),$$

so daß, wenn wir die Abkürzung

$$(5) \quad \frac{h\nu}{kT} = x$$

einführen, die Substitution von (4) in (1) Z ergibt. Wir wollen diesem Wert aber und ebenso der freien Energie, sobald sie sich auf lineare Oszillatoren bezieht, den Index Null geben. So erhalten wir

$$(6) \quad Z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})x} = \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}},$$

also nach (2)

$$(7) \quad \frac{F_0}{N h \nu} = - \frac{\ln Z_0}{x} = - \frac{\ln 2 \sin \frac{x}{2}}{x}.$$

Die Funktionen sind in Tab. 1 niedergelegt worden.

Tabelle 1.

$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu}$	Z_0	$-\frac{\ln Z_0}{x} = \frac{F_0}{N h \nu}$
0,00	∞	∞	$-\infty$
0,10	5,000	4,992	- 8,041
0,12	4,167	4,158	- 5,937
0,14	3,571	3,560	- 4,535
0,16	3,125	3,112	- 3,547
0,18	2,778	2,704	- 2,823
0,20	2,500	2,484	- 2,274
0,30	1,667	1,643	- 0,8266
0,4	1,250	1,217	- 0,2458
0,5	1,000	0,9596	+ 0,0412
0,6	0,8333	0,7854	0,2013
0,7	0,7143	0,6590	0,2977

1) M. Planck II.

Tabelle 1. (Fortsetzung.)

$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu}$	Z_0	$-\frac{\ln Z_0}{x} = \frac{F_0}{Nh\nu}$
0,8	0,6250	0,5630	0,3591
0,9	0,5556	0,4871	0,3997
1,0	0,5000	0,4255	0,4273
1,2	0,4167	0,3313	0,4603
1,4	0,3571	0,2626	0,4774
1,6	0,3125	0,2105	0,4870
1,8	0,2778	0,1699	0,4923
2,0	0,2500	0,1379	0,4949
2,5	0,2000	0,0826	0,4986
3,0	0,1667	0,0499	0,4996
3,5	0,1429	0,0302	0,4998
4,0	0,1250	0,0183	0,4998
5,0	0,1000	0,0067	0,4999
∞	0,0000	0,0000	0,5000

II. Oszillatoren von zwei Freiheitsgraden.

Ein Massenpunkt bewege sich in einer bestimmten Ebene unter dem Einfluß einer quasielastischen Kraft mit der Schwingungszahl ν . Bedeuten u und v die Integrale der Energie und des Flächensatzes, so gilt nach Planck I, S. 396, Formel (21), (22), (24) und (25), wenn $dG = dg dg'$ das Element des Phasenraumes ist,

$$(8) \quad g = \frac{u}{2\nu} - \pi v,$$

$$(9) \quad g' = 2\pi v,$$

so daß

$$(10) \quad = \overline{U_{n,n'}} \frac{\iint u dg dg'}{\iint dg dg'} = \nu \frac{\iint (2g + g') dg dg'}{\iint dg dg'}$$

wird. Hier läuft g von nh bis $(n+1)h$ und g' von $n'h$ bis $(n'+1)h$.

Daraus folgt

$$(11) \quad \overline{U_{n,n'}} = \nu h [2n + 1 + n' + \tfrac{1}{2}],$$

so daß aus Gleichung (1) folgt

$$(12) \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} e^{-x(2n+1+n'+\frac{1}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)x} \cdot \sum_{n'=0}^{\infty} e^{-(n'+\frac{1}{2})x}$$

oder nach (2) und (5)

$$\frac{F}{N h \nu} = - \frac{\ln Z}{x} = 2 \frac{\ln 2 \sin \frac{x}{2}}{2x} + \frac{\ln 2 \sin \frac{x}{2}}{x},$$

d. h. nach (7)

$$(12') \quad F(T, \nu) = F_0(T, 2\nu) + F_0(T, \nu).$$

In Worten: Ein Oszillator von zwei Freiheitsgraden der Schwingungszahl ν ist energetisch vollkommen äquivalent zwei linearen Oszillatoren, von denen der eine die Schwingungszahl ν , der andere die Schwingungszahl 2ν hat.

Das ist aber ein Ausdruck der Nernst-Lindemannschen Formel¹⁾, die zwar praktisch erprobt, bisher aber nicht theoretisch begründet war, jedoch ist zu beachten, daß die Übereinstimmung der Nernst-Lindemannschen Formel und unserer nur gilt, solange man die Schwingungszahl frei wählen kann, diese also nicht etwa durch optische Messungen oder nach Lindemann durch den Schmelzpunkt festliegt; denn Nernst und Lindemann haben den Anschluß an die Erfahrung durch die Annahme gleich vieler linearer Resonatoren der Schwingungszahlen ν und $\nu/2$ erzielt, d. h. ihr ν entspricht unserem 2ν .

III. Oszillatoren von drei Freiheitsgraden.

Ein Massenpunkt bewege sich im Raum unter dem Einfluß eines quasielastischen Kraftzentrums. Auch für diesen Fall hat Planck²⁾ die Struktur des Phasenraums bestimmt.

Bezeichnen u und v wieder die Integrale der Energie und des Flächensatzes, so gilt wie bei zweidimensionalen Oszillatoren

$$(13) \quad \begin{cases} g = \frac{u}{2\nu} - \pi v, \\ g' = 2\pi v, \end{cases}$$

und da das Volumenelement des Phasenraumes

$$(14) \quad dG = dg \cdot dg'^2$$

1) W. Nernst u. F. A. Lindemann, Zeitschr. f. Elektrochemie 17. S. 817. 1911.

2) M. Planck, I, S. 406.

ist, so berechnet sich

$$(15) \quad \overline{u_{n,n'}} = \frac{\iint u \, dg \, dg'^2}{\iint dg \, dg'^2} = v \frac{\iint (2g + g') \, dg \, dg'^2}{\iint dg \, dg'^2}.$$

Über g ist von $n h$ bis $(n+1) h$, über g' von $n' h$ bis $(n'+1) h$ zu integrieren, so daß

$$(16) \quad \overline{u_{n,n'}} = v h \left[2n + 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3n'^2 + 3n' + 1}{2n' + 1} \right].$$

Da ferner

$$(17) \quad p_{n,n'} = 2n' + 1$$

ist, so ergibt (1) die Zustandssumme

$$(18) \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} (2n' + 1) e^{-x \left[2n + 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3n'^2 + 3n' + 1}{2n' + 1} \right]},$$

die ohne weiteres in das Produkt

$$(19) \quad Z = Z_1 \cdot Z_2$$

zerfällt, wo

$$(20) \quad Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x(2n+1)} = \frac{1}{2 \sinh x},$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} Z_2 &= \sum_{n'=0}^{\infty} (2n' + 1) e^{-x \frac{2}{3} \frac{3n'^2 + 3n' + 1}{2n' + 1}} \\ &= 2 \sum_{n'=0}^{\infty} \left(n' + \frac{1}{2} \right) e^{-x \left[n' + \frac{1}{2} + \frac{1}{12(n' + \frac{1}{2})} \right]} \end{aligned} \right.$$

ist.

Die Bedeutung von Z_1 ergibt sich sofort durch Vergleichung mit (6); es ist die Zustandssumme eines linearen Oszillators der Schwingungszahl 2ν .

Die Berechnung von Z_2 nach (21) ist sehr einfach für große Werte von x ; für kleinere x ist es besser, die Gleichung (21) umzuformen.

Setzen wir

$$(22) \quad \frac{1}{12(n' + \frac{1}{2})} = \alpha,$$

so wird

$$\begin{aligned} Z_2 &= 2 \sum_{n'=0}^{\infty} \left(n' + \frac{1}{2} \right) e^{-x(n' + \frac{1}{2} + \alpha)} = 2 \sum_{n'=0}^{\infty} \left(n' + \frac{1}{2} \right) e^{-x(n' + \frac{1}{2})} \\ &\quad - 2 \sum_{n'=0}^{\infty} \left(n' + \frac{1}{2} \right) [e^{-x(n' + \frac{1}{2})} - e^{-x(n' + \frac{1}{2} + \alpha)}]. \end{aligned}$$

Nun ist

$$(23) \quad e^{-\delta} - e^{-\varepsilon} = 2e^{-\frac{\delta+\varepsilon}{2}} \sin \frac{\varepsilon-\delta}{2},$$

also

$$Z_2 = 2 \sum_0^{\infty} (n' + \frac{1}{2}) e^{-x(n' + \frac{1}{2})} - 4 \sum_0^{\infty} (n' + \frac{1}{2}) e^{-(n' + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2})x} \sin \frac{\alpha x}{2}.$$

Ist x so klein, daß

$$\sin \frac{\alpha x}{2} = \frac{\alpha x}{2}$$

gesetzt werden kann, so wird mit Berücksichtigung von (22)

$$Z_2 = 2 \sum_0^{\infty} (n' + \frac{1}{2}) e^{-x(n' + \frac{1}{2})} - \frac{x}{6} \sum_0^{\infty} e^{-x(n' + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2})}$$

und mit erneuter Anwendung der Formel (23)

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} Z_2 &= 2 \sum_0^{\infty} (n' + \frac{1}{2}) e^{-x(n' + \frac{1}{2})} - \frac{x}{6} \sum_0^{\infty} e^{-x(n' + \frac{1}{2})} \\ &\quad + \frac{x^2}{3} \sum_0^{\infty} \frac{\alpha}{4} e^{-x(n' + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4})}. \end{aligned} \right.$$

Die Auswertung der ersten beiden Summanden gelingt leicht, so daß wir für kleine Werte von x schließlich erhalten

$$(25) \quad Z_2 = \frac{\Gamma \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{x}{12 \sin \frac{x}{2}} + \frac{x^2}{3} \sum_0^{\infty} \frac{\alpha}{4} e^{-x(n' + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4})}.$$

Die hier auftretende Größe $\alpha/4$ hat als Funktion von n' nach (22) folgende Werte.

Tabelle 2.

n'	$\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{48(n' + \frac{1}{2})}$	n'	$\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{48(n' + \frac{1}{2})}$
0	0,04167	6	0,00320
1	0,01389	7	0,00278
2	0,00833	8	0,00245
3	0,00595	9	0,00219
4	0,00463	10	0,00198
5	0,00379		

So läßt sich Z_2 für kleine x nach (25) und für große x nach (21) berechnen, und es ergibt sich folgende Tabelle.

Tabelle 3.

x	Z_2	$-\frac{1}{2} \frac{\ln Z_2}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{3}{2} \left[-\frac{1}{2} \frac{\ln Z_2}{x} - \frac{1}{x} \ln \frac{3}{2\sqrt{2}} \right]$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}$
0,0	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞
0,2	49,92	- 9,77	5,000	- 15,09	7,5
0,4	12,41	- 3,150	2,500	- 4,945	3,75
0,6	5,477	- 1,417	1,667	- 2,273	2,5
0,8	3,309	- 0,748	1,250	- 1,232	1,875
1,0	2,191	- 0,3921	1,000	- 0,6764	1,5
1,5	0,8206	+ 0,0660	0,6667	+ 0,0401	1,0
2,0	0,4362	0,2074	0,5000	0,2670	0,75
2,5	0,2603	0,2692	0,4000	0,3685	0,6
3,0	0,1662	0,2991	0,3333	0,4193	0,5
4,0	0,07565	0,3226	0,2500	0,4619	0,375
5,0	0,03692	0,3299	0,2000	0,4772	0,3
10	0,00127	0,3333	0,1000	0,4912	0,15
∞	0,00000	0,3333	0,0000	0,5000	0,0

Nach (2) und (19) ist

$$(26) \quad \frac{F}{Nh\nu} = -\frac{\ln Z}{x} = -\frac{\ln Z_1}{x} - \frac{\ln Z_2}{x} = \frac{F_1}{Nh\nu} + \frac{2F_2}{Nh\nu}.$$

Da nun, wie wir bereits auf Grund der Gleichung (20) sahen,

$$(27) \quad F_1 = -Nh\nu \frac{\ln Z_1}{x}$$

die freie Energie eines linearen Oszillators der Schwingungszahl 2ν darstellt, so können wir

$$-Nh\nu \frac{\ln Z_2}{x}$$

als die freie Energie der beiden anderen Freiheitsgrade deuten. Die Hälfte hiervon, d. h.

$$F_2 = -\frac{Nh\nu}{2} \frac{\ln Z_2}{x}$$

ist der auf jeden dieser beiden Freiheitsgrade fallende Teil.

Deshalb haben wir in der 3. und 4. Kolonne der obigen Tabelle

$$-\frac{1}{2} \frac{\ln Z_2}{x} = \frac{F_2}{Nh\nu}$$

als Funktion von

$$\frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu}$$

berechnet und haben nun zu sehen, ob auch dieser Teil der freien Energie mit der von linearen Oszillatoren identisch ist.

Vergleichen wir unsere Funktion

$$-\frac{1}{2} \frac{\ln Z_2}{x}$$

mit der in Tabelle 1 berechneten Funktion $-\frac{\ln Z_0}{x}$, so sehen wir auf den ersten Blick, daß die beiden Funktionen nicht identisch sind, da ja für $x = \infty$ (d. h. $T = 0$) erstere den Wert $\frac{1}{2}$, letztere den Wert $\frac{1}{3}$ hat.

Wohl aber ist

$$\frac{3}{2} \left[-\frac{1}{2} \frac{\ln Z_2}{x} - \frac{1}{x} \ln \frac{3}{2\sqrt{2}} \right]$$

als Funktion von

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

fast völlig identisch mit $-\frac{\ln Z_0}{x}$ als Funktion von $\frac{1}{x}$, wie das Diagramm beweist, in welchem diese Funktion als Kurve eingezeichnet, jene durch Kreise nach den in Tab. 3, Kolonne 5 und 6 ermittelten Werten markiert ist.

Die physikalische Bedeutung dieser mathematischen Transformation erkennen wir aus folgender Überlegung.

Bezeichnen wir für den Augenblick die Funktion

$$-\frac{1}{2} \frac{\ln Z_2}{x}$$

in ihrer Abhängigkeit von $\frac{1}{x}$ durch $V_2\left(\frac{1}{x}\right)$ und ebenso $-\frac{\ln Z_0}{x}$ als Funktion von $\frac{1}{x}$ durch $V_0\left(\frac{1}{x}\right)$, so lehrt uns unser Diagramm, daß sehr genähert

$$(28) \quad \frac{3}{2} \left[V_2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \ln \frac{3}{2\sqrt{2}} \right] = V_0\left(\frac{3}{2x}\right)$$

ist, d. h. es gilt

$$(29) \quad V_2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{3} V_0\left(\frac{3}{2x}\right) + \frac{1}{x} \ln \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $Nh\nu$, berücksichtigen, daß

$$\frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu}$$

ist, und führen die Bezeichnung

$$(30) \quad \frac{2}{3} \nu = \nu'$$

ein, so wird mit großer Näherung

$$(31) \quad F_2(T, \nu) = F_0(T, \nu') + NkT \ln \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

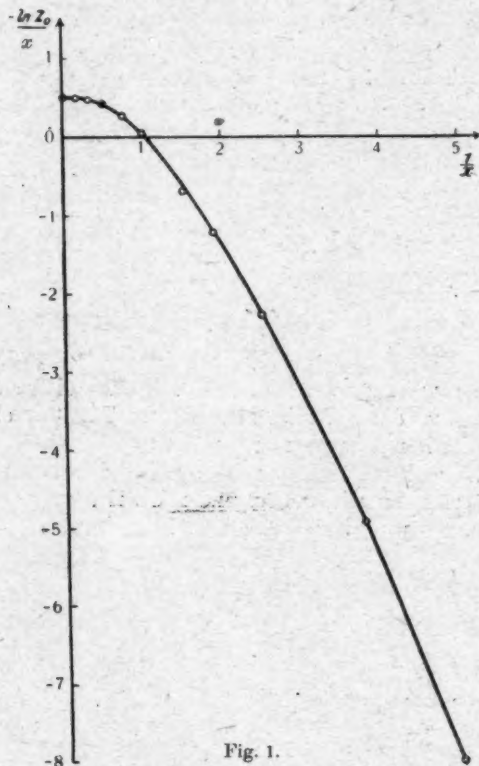


Fig. 1.

Nun ist eine freie Energie nach der klassischen Thermodynamik nur bis auf eine additive lineare Funktion der Temperatur bestimmt. Sehen wir deshalb also vom zweiten Summanden rechts in der Gleichung (31) ab, so sagt uns diese Beziehung, daß der Teil der freien Energie, den wir jetzt be-

trachten, identisch ist mit der eines linearen Oszillators der Schwingungszahl $\nu' = \frac{2}{3} \nu$.

Nach (26) und der Bemerkung, die wir an (27) anknüpften, ist also ein Oszillator von drei Freiheitsgraden mit der Schwingungszahl ν energetisch zu ersetzen durch drei lineare Oszillatoren, von denen einer die Schwingungszahl 2ν , die anderen beiden jeder die Schwingungszahl $\frac{2}{3} \nu$ haben.

Zum Schluß möge noch eine Bemerkung über die Berechtigung der Annäherung dieses Resultates gesagt werden. Erstens liegen in dem Diagramm die Kreise nicht ganz exakt auf der Kurve, zweitens wissen wir, daß in der modernen Thermodynamik, welche den dritten Hauptsatz, das Nernstsche Wärmetheorem, mit berücksichtigt, nicht nur $\lim_{T \rightarrow 0} F = 0$ werden muß, sondern auch

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{dF}{dT} = 0.$$

Dieser letzteren Bedingung genügt die Näherungsformel (81) nicht.

Wohl aber ist Gleichung (81) und der aus ihr folgende Äquivalenzsatz *praktisch* völlig genügend und beschreibt die komplizierteren Vorgänge durch Zurückführung auf die bekannten Erscheinungen an linearen Oszillatoren in *einfacher* Weise.

La Plata, 15. Januar 1917. Instituto de Física.

(Eingegangen 23. August 1919.)

**8. Der gegenseitige Induktionskoeffizient von
Rechtecken und Quadraten;
von A. Esau.**

Die große Bedeutung, die „geschlossene“ Antennenformen Braunsche Rahmenantennen) für Empfangszwecke der drahtlosen Telegraphie in ihrer neuesten Entwicklung erlangt haben, läßt den Wunsch berechtigt erscheinen, Formeln für die Berechnung der Selbst- und gegenseitigen Induktionskoeffizienten derartiger Gebilde zu besitzen.

Während die Rechnung für kreisförmigen Spulenquerschnitt bereits früher¹⁾ durchgeführt worden ist, fehlt es an Formeln für rechteckigen und quadratischen Querschnitt, der den praktischen Anordnungen fast ausschließlich zugrunde gelegt worden ist.

Die Ableitung der Formel für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier aus mehreren Windungen bestehenden derartigen Spulen setzt zunächst die Kenntnis jenes Koeffizienten von einfachen Rechtecken voraus, die verschieden groß sind, wofür ich in der Literatur eine Formel nicht habe finden können.

Die von Neumann²⁾ und Martens³⁾ angegebenen Ausdrücke sind für den vorliegenden Zweck nicht anwendbar, da sie entweder gleich große, symmetrisch in parallelen oder verschieden große in der gleichen Ebene gelegene Rechtecke voraussetzen.

Die beiden erwähnten Formeln werden übrigens in dem jetzt abzuleitenden Ausdruck, wie die Untersuchung ergeben wird, als spezielle Fälle enthalten sein.

1) B. Střasser, Ann. d. Phys. 17. S. 763. 1905; A. Esau, Jahrb. d. drahtl. Telegraphie 14. S. 271. 1919.

2) Neumann, Allgem. Gesetze der reduzierten Ströme, Abh. d. Berl. Akad. 1845.

3) F. F. Martens, Ann. d. Phys. 29. S. 959. 1909.

Ableitung der Formel.

Wir setzen voraus zwei Rechtecke mit den Seitenlängen $a + 2c$ und $b + 2c$, die in zwei parallelen Ebenen vom Abstand d einander gegenüber liegen (vgl. Fig. 1).

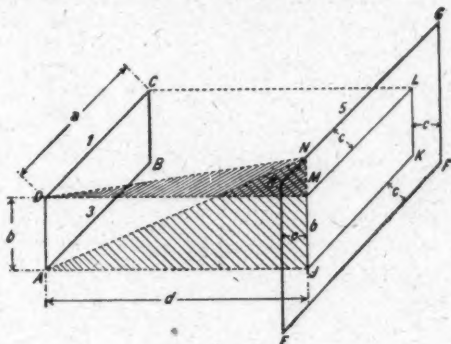


Fig. 1.

Ihr gegenseitiger Induktionskoeffizient M setzt sich zusammen aus zwei Teilen, von denen der eine, M_h , den horizontalen, der andere, M_v , den vertikalen Seiten seine Entstehung verdankt

$$M = M_h + M_v.$$

M_h ist, wenn man den gegenseitigen Induktionskoeffizienten der Seiten 1 und 5 mit M_{15} , den von 3 und 5 mit M_{35} bezeichnet, gleich der doppelten Differenz $M_{15} - M_{35}$:

$$M_h = 2(M_{15} - M_{35}).$$

M_{15} bedeutet den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier parallelen Geraden von den Längen a und $a + 2c$ und dem Abstand h , der nach Martens sich darstellen läßt in der Form

$$M_{15} = 2 \left\{ s_0 \ln \frac{s_0 + \sqrt{h^2 + s_0^2}}{h} - s_0 \ln \frac{s_0 + \sqrt{h^2 + s_0^2}}{h} + \sqrt{h^2 + s_0^2} - \sqrt{h^2 + s_0^2} \right\}.$$

Die Größen s_0 , S_0 und h haben die folgenden Bedeutungen:

$$s_0 = c; \quad S_0 = a + c; \quad h = \sqrt{c^2 + d^2}$$

(folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck DNM , in dem $MN = c$, $DM = d$ und $DN = h$ ist).

Nach Einführung dieser Werte in die Gleichung für M_{15} erhalten wir

$$M_{15} = 2 \left\{ \begin{aligned} & a \ln \frac{a + c + \sqrt{(a+c)^2 + c^2 + d^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} \\ & + c \ln \frac{(a + c + \sqrt{(a+c)^2 + c^2 + d^2}) \sqrt{c^2 + d^2}}{c + \sqrt{2c^2 + d^2}} \\ & - \sqrt{(a+c)^2 + c^2 + d^2} + \sqrt{2c^2 + d^2} \end{aligned} \right\}$$

Bei M_{35} haben wir für s_0 , S_0 und h zu setzen:

$$s_0 = c; \quad S_0 = a + c; \quad h = \sqrt{(b+c)^2 + d^2}$$

(folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck AJN mit den Seiten $AJ = d$, $AN = h$ und $NJ = b + c$).

$$M_{35} = 2 \left\{ \begin{aligned} & a \ln \frac{a + c + \sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2 + d^2}}{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}} \\ & + c \ln \frac{a + c + \sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2 + d^2}}{c + \sqrt{(b+c)^2 + c^2 + d^2}} \\ & - \sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2 + d^2} + \sqrt{(b+c)^2 + c^2 + d^2} \end{aligned} \right\}$$

Damit wird

$$M_h = 4 \left\{ \begin{aligned} & a \ln \frac{(a + c + \sqrt{(a+c)^2 + c^2 + d^2}) \sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{(a + c + \sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2 + d^2}) \sqrt{c^2 + d^2}} \\ & + c \ln \frac{(a + c + \sqrt{(a+c)^2 + c^2 + d^2}) (c + \sqrt{(b+c)^2 + c^2 + d^2})}{(a + c + \sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2 + d^2}) (c + \sqrt{2c^2 + d^2})} \\ & + \sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2 + d^2} - \sqrt{(a+c)^2 + c^2 + d^2} \\ & - \sqrt{(b+c)^2 + c^2 + d^2} + \sqrt{2c^2 + d^2} \end{aligned} \right\}$$

M'_v entsteht aus der vorhergehenden Formel, wenn man a und b miteinander vertauscht:

$$M'_v = 4 \left\{ \begin{aligned} & b \ln \frac{(b + c + \sqrt{(b+c)^2 + c^2 + d^2}) \sqrt{(a+c)^2 + d^2}}{(b + c + \sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2 + d^2}) \sqrt{c^2 + d^2}} \\ & + c \ln \frac{(b + c + \sqrt{(b+c)^2 + c^2 + d^2}) (c + \sqrt{(a+c)^2 + c^2 + d^2})}{(b + c + \sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2 + d^2}) (c + \sqrt{2c^2 + d^2})} \\ & + \sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2 + d^2} - \sqrt{(a+c)^2 + c^2 + d^2} \\ & - \sqrt{(b+c)^2 + c^2 + d^2} + \sqrt{2c^2 + d^2} \end{aligned} \right\}$$

Nach Einsetzen der für M_h und M_v gefundenen Ausdrücke in die Gleichung

$$M = M_v + M_h$$

erhalten wir für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten der beiden Rechtecke die allgemeine Formel

$$M = 4 \left\{ \begin{aligned} & a \ln \frac{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{(b+c)^2+d^2}}{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})\sqrt{c^2+d^2}} \\ & + b \ln \frac{(b+c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{(a+c)^2+d^2}}{(b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})\sqrt{c^2+d^2}} \\ & + c \ln \frac{(c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})}{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})} \\ & \quad \frac{(b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})(c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})}{(b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})(\sqrt{2c^2+d^2}+c)^2} \\ & + 2[\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2} - \sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2} \\ & \quad - \sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2} + \sqrt{2c^2+d^2}] \end{aligned} \right\}$$

Nachdem wir die allgemeine Formel gefunden haben, wollen wir auf die in ihr enthaltenen speziellen Fälle näher eingehen.

$$1. \ a \geq b; \ c = 0; \ d > 0.$$

Setzt man $c = 0$, d. h. haben beide Rechtecke die gleichen Seitenabmessungen, so erhalten wir für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten den Ausdruck

$$M = 4 \left\{ \begin{aligned} & a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + d^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{d} \\ & + b \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + d^2}}{b + \sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + d^2}}{d} \\ & + 2[\sqrt{a^2 + b^2 + d^2} - \sqrt{a^2 + d^2} - \sqrt{b^2 + d^2} + d] \end{aligned} \right\}$$

Das ist die Neumannsche Formel.

$$2. \ a \geq b; \ d = 0; \ c \geq 0.$$

Wird $d = 0$, so rücken die beiden Rechtecke in eine Ebene. Der gegenseitige Induktionskoeffizient wird dann

$$M = 4 \left\{ \begin{aligned} & a \ln \frac{a + c + \sqrt{(a+c)^2 + c^2}}{a + c + \sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2}} \cdot \frac{b+c}{c} \\ & + b \ln \frac{b + c + \sqrt{(b+c)^2 + c^2}}{b + c + \sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2}} \cdot \frac{a+c}{c} \\ & + c \ln \frac{(c + \sqrt{(a+c)^2 + c^2})(a + c + \sqrt{(a+c)^2 + c^2})}{(a + c + \sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2})(b + c + \sqrt{(b+c)^2 + c^2})} \\ & \quad \cdot c^2 (1 + \sqrt{2})^2 \\ & + 2 [\sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2} - \sqrt{(a+c)^2 + c^2} \\ & \quad - \sqrt{(b+c)^2 + c^2} + c (\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))] \end{aligned} \right\}$$

$$3. \quad a = b; \quad c \geq 0; \quad d > 0.$$

Wir setzen jetzt $a = b$ und kommen damit zu den praktisch wichtigen Formeln für die gegenseitige Induktion zweier in parallelen Ebenen vom Abstand d einander gegenüberliegenden Quadrate mit den Seitenlängen a und $a + c$.

Es wird hierfür

$$M = 8 \left\{ \begin{aligned} & a \ln \frac{(a + c + \sqrt{(a+c)^2 + c^2 + d^2}) \sqrt{(a+c)^2 + d^2}}{a + c + \sqrt{2(a+c)^2 + d^2} \sqrt{c^2 + d^2}} \\ & + c \ln \frac{(c + \sqrt{(a+c)^2 + c^2 + d^2})(a + c + \sqrt{(a+c)^2 + c^2 + d^2})}{(a + c + \sqrt{2(a+c)^2 + d^2})(\sqrt{2c^2 + d^2} + c)} \\ & + \sqrt{2(a+c)^2 + d^2} + \sqrt{2c^2 + d^2} - 2 \sqrt{(a+c)^2 + c^2 + d^2} \end{aligned} \right\}$$

$$4. \quad a = b; \quad c = 0; \quad d > 0.$$

Für gleich große Quadrate im Abstand d läßt sich der gegenseitige Induktionskoeffizient schreiben in der Form

$$M = 8 \left[a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + d^2}}{a + \sqrt{2a^2 + d^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + d^2}}{d} + \sqrt{2a^2 + d^2} - 2 \sqrt{a^2 + d^2} + d \right]$$

Dieser Ausdruck läßt sich aus der vorhin angeführten Neumannschen Formel ableiten, wenn man dort $a = b$ setzt.

$$5. \quad a = b; \quad c \geq 0; \quad d = 0.$$

Der gegenseitige Induktionskoeffizient zweier in einer Ebene gelegenen Quadrate, deren Abstand c ist, wird

$$M = 8 \left\{ \begin{aligned} & (a + c) \ln \frac{a + c + \sqrt{(a+c)^2 + c^2}}{c} + c \ln \frac{c + \sqrt{(a+c)^2 + c^2}}{a + c} \\ & - 2 \sqrt{(a+c)^2 + c^2} + (a + c) [\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})] \end{aligned} \right\}$$

Dieser Ausdruck stimmt überein mit dem von Martens gefundenen.

Umgestaltung der allgemeinen Formel.

Die soeben abgeleiteten Formeln gelten für beliebige Werte des Abstandes der Spulen und ihrer Abmessungen.

Führt man aber die Beschränkung ein, daß die Verhältnisse c/a und d/a kleine Werte annehmen, was immer dann der Fall sein wird, wenn der Abstand klein und die Abmessungen der Figuren nicht wesentlich voneinander verschieden sind, so kann man die für quadratischen Windungsquerschnitt geltende Formel (4) — und auf diese wollen wir uns im folgenden beschränken — noch erheblich vereinfacht werden.

Zu diesem Zweck entwickeln wir in ihr die Wurzel- und logarithmischen Ausdrücke nach Potenzen von c/a und d/a und erhalten für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten die Formel

$$M = 8a \left\{ r + s \frac{c}{a} + t \frac{c^2}{a^2} + u + \frac{d^2}{a^2} \sqrt{2 \frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}} - \ln \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}} \right. \\ \left. - \frac{c}{a} \ln \left(\sqrt{2 \frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}} + \frac{c}{a} \right) \right\}.$$

Hierin sind die Größen r , s , t und u zur Abkürzung für folgende Ausdrücke gesetzt worden

$$r = \sqrt{2} - 2 + \ln \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = -0,774,$$

$$s = \sqrt{2} - 1 + \ln \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = +0,226,$$

$$t = 0,75,$$

$$u = \frac{1 - \sqrt{2}}{4(1 + \sqrt{2})} = -0,043.$$

Spezialfälle.

$$1. \ c = 0; \ d > 0.$$

Die obige Formel geht für den Fall gleich großer, im Abstände d voneinander gelegenen Quadrate über in die folgende

$$M = 8a \left\{ \ln \frac{a}{d} + r + \frac{d}{a} + u \frac{d^2}{a^2} \right\}$$

oder nach Einführung der Werte für r und u

$$M = 8a \left\{ \ln \frac{a}{d} - 0,774 + \frac{d}{a} - 0,043 \frac{d^2}{a^2} \right\}.$$

Diese Formel ist von mir benutzt worden bei der Ableitung der Formel für den Selbstinduktionskoeffizienten von Spulen mit quadratischem Windungsquerschnitt.¹⁾

$$2. \quad c \geq 0; \quad d = 0.$$

Liegen die beiden Quadrate in einer Ebene, so wird

$$M = 8a \left\{ \ln \frac{a}{c} + r + \frac{c}{a} \left(\ln \frac{a}{c} + s + \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) \right) + t \frac{c^2}{a^2} \right\}$$

oder anders geschrieben

$$M = 8a \left\{ \ln \frac{a}{c} - 0,774 + \frac{c}{a} \left(\ln \frac{a}{c} + 0,759 \right) + 0,75 \frac{c^2}{a^2} \right\}.$$

Gültigkeitsbereich der Reihenformel.

Da bei der Reihenentwicklung alle die Glieder nicht berücksichtigt wurden, deren Potenzen über die zweite hinausgehen, so ist ohne weiteres klar, daß die erhaltenen Formeln bei größeren Werten der Argumente c/a und d/a versagen müssen.

Ihr Gültigkeitsbereich bleibt beschränkt, wie durch Vergleich mit der exakten Formel nachgewiesen werden kann, auf Werte der Verhältnisse c/a und d/a , die unterhalb von 0,25 liegen. Die Abweichungen bei 0,3 betragen etwa 1%.

Vereinfachung der Berechnung.

Um die Berechnung des gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier in parallelen Ebenen vom Abstand d einander gegenüberliegenden Quadrate und den Seitenlängen a und $a + 2c$ einfacher zu gestalten (schreiben wir die allgemeine Gleichung 3) in der Form

$$M = aS,$$

wo

$$S = 8 \left\{ \ln \frac{1 + \frac{c}{a} + A}{1 + \frac{c}{a} + B} \cdot \frac{D}{C} + \frac{c}{a} \ln \frac{1 + \frac{c}{a} + A}{1 + \frac{c}{a} + B} \cdot \frac{\frac{c}{a} + A}{\frac{c}{a} + E} + B + E - 2A \right\}$$

gesetzt worden ist.

1) A. Esau, Jahrb. d. drahtl. Telegraphie 14. S. 271. 1919.

Die Wurzelausdrücke A , B , C , D und E haben dann die folgenden Werte

$$A = \sqrt{\left(1 + \frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{d^2}{a^2}}, \quad D = \sqrt{\left(1 + \frac{c}{a}\right)^2 + \frac{d^2}{a^2}},$$

$$B = \sqrt{2\left(1 + \frac{c}{a}\right)^2 + \frac{d^2}{a^2}}, \quad E = \sqrt{2\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}},$$

$$C = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}},$$

Die Größe S ist für eine Reihe von Wertsystemen c/a und d/a nach der allgemeinen Formel (3) berechnet worden und kann der folgenden Tabelle entnommen werden.

$$S = f\left(\frac{c}{a}, \frac{d}{a}\right).$$

$\frac{d}{a} =$	0,0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	4,0
$\frac{c}{a} = 0,0$		13,02	8,264	3,224	1,016	0,202	0,028
0,1	14,74	12,12	8,832	3,688	1,312	0,264	0,036
0,2	10,70	9,904	8,232	4,232	1,576	0,360	0,056
0,5	6,40	6,256	5,872	4,264	2,136	0,600	0,112
1,0	3,968	3,936	3,856	3,384	2,328	0,952	0,208
2,0	2,920	2,296	2,256	2,176	1,888	1,184	0,416
4,0	1,232	1,248	1,256	1,232	1,200	1,200	0,568

Den Verlauf der Kurven $S = f\left(\frac{c}{a}, \frac{d}{a}\right)$ zeigen die nachstehenden Figuren.

In Fig. 2 sind die Kurvenscharen eingetragen, die sich ergeben, wenn man bei konstant gehaltenen Werten $\frac{c}{a} S$ als Funktion von d/a auffaßt, während Fig. 3 den Verlauf $S = f\left(\frac{c}{d}\right)$ bei konstanten Werten d/a zeigt. Man ersieht aus ihnen, daß für jeden Wert c/a die Kurve $S = f\left(\frac{a}{d}\right)$ ein Maximum besitzt, das um so ausgeprägter ist, je kleiner d/a gewählt wird. Mit wachsendem c/a wird dieses Maximum flacher und flacher und rückt außerdem mehr und mehr nach Stellen größerer Werte des d/a hin. Für Fig. 3 gilt das Entsprechende.

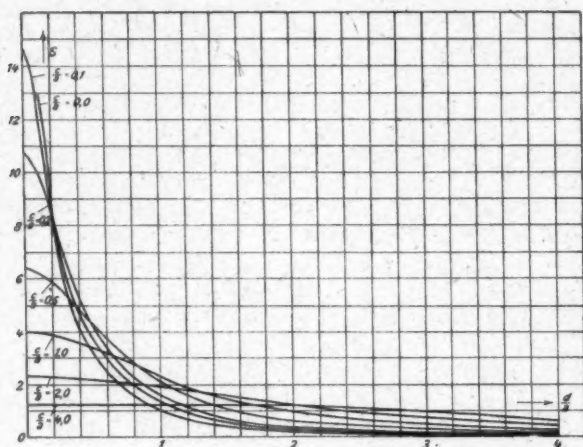


Fig. 2.

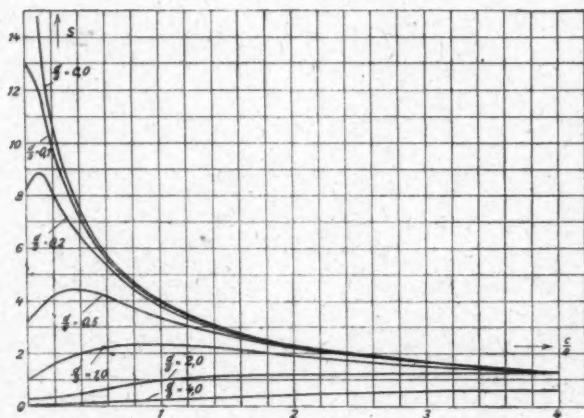


Fig. 3.

Berechnung des Koppelungskoeffizienten K .

Unter der Annahme, daß die beiden Quadrate zwei miteinander gekoppelten Schwingungskreisen angehören und daß sie die einzigen in den Kreisen vorhandenen Selbstinduktionen

sind, läßt sich ihr Koppelungskoeffizient K auf sehr einfache und schnelle Weise bestimmen. Der Koppelungskoeffizient ist definiert durch die bekannte Beziehung

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \text{oder} \quad K\%_0 = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \times 100.$$

Setzen wir hierin $M = a S$ und für die Selbstinduktionskoeffizienten L_1 und L_2 der beiden Quadrate, wie sich aus meiner früheren Arbeit über den gegenseitigen Induktionskoeffizienten häufig vorkommender Leiterformen¹⁾ ergibt

$$L_1 = a S' \quad \text{bzw.} \quad L_2 = a' S'',$$

so wird

$$K = \sqrt{\frac{a}{a'}} \cdot \frac{\sqrt{S}}{S' S''}.$$

Die Größen S , S' und S'' lassen sich aus der vorhergehenden und folgenden Tabelle für jedes beliebige Wertsystem c/a und d/a entnehmen.

Tabelle für die Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten von Quadraten.

$S' = f\left(\frac{a}{q}\right)$		$L = a S' \quad (q = \text{Drahtalbmesser})$	
$\frac{a}{q}$	S'	$\frac{a}{q}$	S'
20	20,18	800	49,30
40	25,52	1000	51,08
60	27,90	2000	56,62
80	30,97	4000	62,16
100	32,73	6000	65,41
200	38,23	8000	67,70
400	43,76	10000	69,49
600	47,00		

Die Berechnung soll nun für ein bestimmtes Beispiel durchgeführt werden.

Die beiden Quadrate sollen die Seitenlängen $a = 100$ cm und $a' = 300$ cm besitzen, ihr Drahtdurchmesser sei $2\rho = 0,1$ cm.

Zu berechnen ist der Kuppelungskoeffizient für die Entfernungen 10 cm und 100 cm.

Es ist also

$$\frac{c}{a} = 1, \quad \frac{d}{a} = 0,1 \quad \text{bzw.} \quad 1,0, \quad a = 100 \text{ cm},$$

$$a' = a + 2c = 300 \text{ cm}. \quad 2\rho = 0,1 \text{ cm}.$$

1) A. Esau, Jahrb. d. drahtl. Telegraphie. 15. 1920.

Aus der Tabelle erhalten wir

$$S = 3,936 \text{ bzw. } 2,328,$$

$$S' = 56,62,$$

$$S' = 65,41$$

und

$$K = \frac{3,936}{\sqrt{3 \cdot 56,62 \cdot 65,41}} = 3,73\%,$$

bzw.

$$K = \frac{2,328}{\sqrt{3 \cdot 56,62 \cdot 65,41}} = 2,2\%.$$

Die Koppelung in 10 cm Entfernung beträgt also 3,73%,
in 1 m Entfernung 2,2%.

Zusammenfassung.

Es wird eine Formel abgeleitet für die Berechnung des gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier in parallelen Ebenen einander gegenüberliegenden Rechtecke von ungleicher Größe.

Die allgemeine Formel enthält eine Reihe von speziellen Fällen, die unter anderem die Neumannsche Formel für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier in parallelen Ebenen liegenden gleich großen Rechtecke und die Formel von Martens für zwei in einer Ebene liegende Quadrate ergeben. Unter der Annahme, daß die Verhältnisse

$\frac{\text{Abstand}}{\text{Seitenlänge}}$ und $\frac{\text{Differenz der Seitenlängen}}{\text{kleinste Seitenlänge}}$ kleiner sind als 0,25,

wird eine für die Rechnung sehr einfache Näherungsformel abgeleitet. Aus berechneten Tabellen und Kurven kann man für jeden beliebigen Wert der obigen Verhältnisse den zugehörigen Wert des gegenseitigen Induktionskoeffizienten entnehmen und unter Hinzunahme der für die Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten mitgeteilten Tabelle auf sehr einfache Weise den Koppelungskoeffizienten bestimmen.

Berlin, den 9. Sept. 1919.

Laboratorium der Ges. für drahtlose Telegraphie (Telefunken) Berlin.

(Eingegangen 28. September 1919.)

